

CFA/VISHNO 2016

**Corde non linéaire amortie : formulation hamiltonienne à ports, réduction d'ordre exacte et simulation à passivité garantie**

T. Hélie et D. Roze

STMS, IRCAM-CNRS-UPMC, 1, place Igor Stravinsky, 75004 Paris, France  
thomas.helie@ircam.fr



LE MANS

Cet article porte sur la simulation d'une corde amortie, dont la tension globale dépend de la déformation et qui est excitée par une force externe distribuée. Un modèle énergétiquement bien posé de ce système non linéaire est donné et reformulé dans le cadre des Systèmes Hamiltoniens à Ports. Les systèmes de cette classe satisfont un bilan de puissance qui se décompose en parties "conservative", "dissipative" et "source externe". On montre que pour la non-linéarité du modèle considéré, la décomposition modale standard du système linéarisé (petites déformations) s'applique au cas non linéaire. Plus précisément, pour une force excitant un nombre fini de modes, cette décomposition modale conduit à une réduction d'ordre exacte. De plus, le modèle réduit admet encore une formulation Hamiltonienne à Ports. Des simulations à passivité garantie sont construites à partir d'une méthode numérique qui préserve le bilan de puissance dans le domaine à temps discret avec sa décomposition en parties "conservative", "dissipative" et "source". Les résultats numériques et de synthèse sonore sont présentés et analysés dans le cas de petites et grandes déformations.

## 1 Plan

L'article est organisé de la manière suivante. La section 2 donne quelques rappels sur les Systèmes Hamiltoniens à Ports. La section 3 introduit le modèle de corde considéré. Dans la section 4, une réduction d'ordre exacte du modèle est proposée. La section 5 expose la méthode numérique utilisée pour la simulation, qui garantit la passivité. Les simulations et résultats sont présentés en section 6. La section 7 donne des conclusions et perspectives.

## 2 Systèmes Hamiltoniens à Ports

### 2.1 Rappels en dimension finie

On considère un système d'entrée  $u(t) \in \mathbb{U} = \mathbb{R}^P$ , d'état  $x(t) \in \mathbb{X} = \mathbb{R}^N$  et de sortie  $y(t) \in \mathbb{Y} = \mathbb{R}^P$ , gouverné par la représentation d'état structurée (cf. [1])

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= (J(x) - R(x)) \nabla H(x) + G(x)u \\ y &= G(x)^T \nabla H(x) \end{cases} \quad (1)$$

où la fonction  $H$  exprime l'énergie totale stockée par le système en fonction de l'état  $x$

$$E(t) = H(x(t)) \quad \text{avec } H \in C^1(\mathbb{X}, \mathbb{R}^+) \text{ définie positive,} \quad (2)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient,  $J = -J^T$  est une matrice anti-symétrique et  $R = R^T \geq 0$  est une matrice positive. La variation temporelle d'énergie d'un tel système satisfait le bilan de puissance

$$\frac{dE}{dt} = \left( \nabla H(x)^T \frac{dx}{dt} \right) = \underbrace{\nabla H(x)^T J(x) \nabla H(x)}_{P_c=0} - \underbrace{\nabla H(x)^T R(x) \nabla H(x)}_{P_d \geq 0} + \underbrace{y^T u}_{P_{\text{ext}}} \quad (3)$$

Ce bilan de puissance est constitué d'une somme de puissances élémentaires due au stockage, à la dissipation et aux échanges avec l'extérieur. Typiquement, chaque terme correspond au produit d'un flux (courant électrique, vitesse mécanique, débit acoustique, etc) et des efforts associés (tension électrique, force mécanique, pression acoustique, etc) : si  $[\nabla H]_i$  est un effort, alors  $\frac{dx_i}{dt}$  est le flux correspondant, et réciproquement.

Dans le bilan (3), le terme  $P_c$  est nul car  $J$  est anti-symétrique : il traduit les échanges de puissance entre éléments stockants et représente la partie conservative du système. Le terme  $P_d$  est positif car  $R \geq 0$  : il représente la puissance dissipée. Le terme  $P_{\text{ext}}$  représente la puissance

apportée au système par le milieu extérieur via les entrées-sorties (ports d'interaction). Le bilan (3) exprime la passivité du système : à sources externes éteintes ( $u = 0$ ), l'énergie peut être constante (cas conservatif  $P_d = 0$ ) ou décroissante (cas dissipatif  $P_d > 0$ ).

### 2.2 Exemple : oscillateur mécanique amorti

On considère le système mécanique linéaire masse-amortisseur-ressort soumis à une force externe  $f_{\text{ext}}$ , décrit en figure 1.

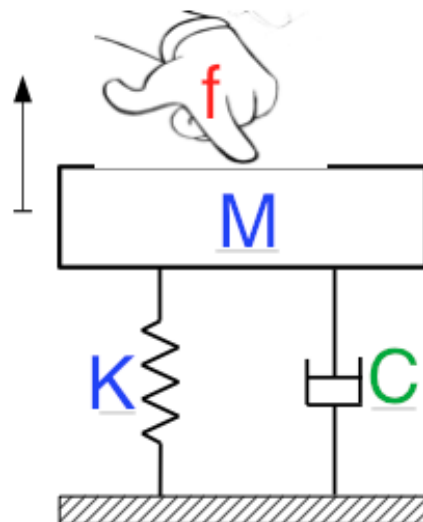


FIGURE 1 – Système linéaire masse-amortisseur-ressort soumis à une force extérieure : description, notation et conventions d'orientation.

Ce système a pour

**entrée** ( $P = 1$ ) :  $u(t) = f_{\text{ext}}(t)$  (en N),

**état** ( $N = 2$ ) :  $x = [\ell, p]^T$ , où  $\ell$  et  $p$  sont respectivement l'élongation du ressort (en m) et la quantité de mouvement de la masse (en Kg.m.s<sup>-1</sup>),

**sortie** ( $P = 1$ ) :  $y(t) = v_{\text{ext}}(t)$ , variable de co-puissance de l'entrée, c'est-à-dire, la vitesse du point de contact où est appliquée la force extérieure.

L'énergie totale (2) stockée par le système est donnée par  $H(x) = \frac{1}{2}x^T W x$  où  $W = \text{diag}(K, M^{-1}) > 0$  est composée de la raideur du ressort  $K$  (en N.m<sup>-1</sup>) et de l'inverse de la masse inertielle (en Kg<sup>-1</sup>). Il s'en suit que la dérivée temporelle de l'état  $x$  et le gradient de la fonction d'énergie  $H$  correspondent aux flux et aux efforts de chaque composant

stockant :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\ell}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\text{ressort}} \\ f_{\text{masse}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(flux)} \\ \text{(effort)} \end{matrix}$$

$$\text{et } \nabla H(x) = \begin{bmatrix} K\ell \\ M^{-1}p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\text{ressort}} \\ v_{\text{masse}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(effort)} \\ \text{(flux)} \end{matrix}$$

Le système dynamique est décrit par le système d'équations (1) avec

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad \text{et } G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En effet, l'équation d'état de (1) écrite pour les flux et effort correspond à

$$\begin{bmatrix} v_{\text{ressort}} \\ f_{\text{masse}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\text{ressort}} \\ v_{\text{masse}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_{\text{ext}}.$$

La première ligne exprime qu'il y a une liaison rigide entre le ressort et la masse :  $v_{\text{ressort}} = v_{\text{masse}}$ . La seconde ligne exprime le bilan des forces  $f_{\text{masse}} = -f_{\text{ressort}} - f_{\text{amortisseur}} + f_{\text{ext}}$  où la contre-force de l'amortisseur  $f_{\text{amortisseur}} = C v_{\text{amortisseur}}$  est ré-exprimée en exploitant la liaison rigide entre l'amortisseur et la masse  $v_{\text{amortisseur}} = v_{\text{masse}}$ .

**Remarque :** Dans le cas de  $n$  oscillateurs couplés et excités par un vecteur de  $n$  forces  $f_{\text{ext}}$ , ces équations peuvent être adaptées en remplaçant  $M$ ,  $K$  et  $C$  par des matrices positives symétriques et en remplaçant les scalaires 1 et 0 par les matrices  $I_n$  et  $0_{n \times n}$ .

## 3 Modèle de corde non linéaire

### 3.1 Problème aux limites

On considère une corde amortie en grande déformation [2] fixée à ses extrémités et excitée par une force linéique distribuée  $f$  et initialement au repos. Une version adimensionnée de ce modèle (masse linéique, tension de corde au repos et longueur de corde unitaires) est donnée par

$$\partial_t^2 w + \alpha \partial_t w - \underbrace{\left(1 + \varepsilon \int_0^1 (\partial_\ell w)^2 d\ell\right)}_{\mathcal{T}(\partial_\ell w)} \partial_\ell^2 w = f, \quad (4)$$

sur le domaine  $(t, \ell) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0, 1[$ , avec les conditions aux frontières

$$w = 0 \text{ pour } (t, \ell) \in \mathbb{R}_+^* \times \{0, 1\} \quad (5)$$

et les conditions initiales

$$w = 0 \text{ et } \partial_t w = 0 \text{ pour } (t, \ell) \in \{0\} \times ]0, 1[. \quad (6)$$

Dans ce modèle,  $t \in \mathbb{R}_+$  représente le temps,  $\ell \in [0, 1]$  représente l'abscisse,  $w(\ell, t)$  est le déplacement transverse de la corde et  $f(\ell, t)$  est la force d'excitation. Les paramètres  $\alpha > 0$  quantifie l'effet d'amortissement fluide. Le paramètre  $\varepsilon \geq 0$  quantifie l'effet de variation de tension globale  $\mathcal{T}$  en fonction la déformation locale  $\partial_\ell w$  ( $\mathcal{T}$  est une fonctionnelle).

En régime libre ( $f = 0$ ) et en l'absence d'amortissement ( $\alpha = 0$ ), l'intégration spatiale sur  $[0, 1]$  et temporelle sur  $[0, t]$  de (4) multipliée par  $\partial_t w$  conduit à la conservation de l'énergie totale de la corde. Cette énergie est la somme de l'énergie cinétique  $E_c = \int_0^1 \frac{1}{2} (\partial_t w)^2 d\ell$  et potentielle  $E_p = (1 + \varepsilon \int_0^1 (\partial_\ell w)^2 d\ell) \int_0^1 \frac{1}{2} (\partial_\ell w)^2 d\ell$ .

## 3.2 Formulation Hamiltonienne à Port

**Elements techniques et cadre fonctionnel du problème linéaire** Dans le cas linéaire ( $\varepsilon = 0$ ), le problème au limite (4-6) se réécrit sous la forme  $\partial_t^2 w + C \partial_t w + \mathcal{K}w = f$  avec les conditions aux initiales (6) et les opérateurs bien posés dans le cadre fonctionnel défini comme suit (voir [3, §4] et [4] pour plus de détails).

(D1) On introduit  $\mathbb{H} = L^2(0, 1)$ , l'espace des configurations des positions  $w(t)$  (espace de Hilbert) ;

(D2) L'opérateur  $\mathcal{K}$  non borné sur  $\mathbb{H}$  est défini par  $\mathcal{K}w \equiv \partial_\ell^2 w$  sur le domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{K}) = \{w \in H^2(0, 1) \text{ tq. } w(0) = w(1) = 0\}$  où  $H^2$  désigne l'espace de Sobolev d'ordre 2 (notation standard) ;

(D3) L'opérateur  $C = \alpha I$  est borné sur  $\mathbb{H}$  ;

(D4) La force linéique  $f$  est une trajectoire bornée sur  $\mathbb{H}$ .

On peut alors définir un opérateur racine carrée de  $\mathcal{K}$ , unique ( $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} \equiv \partial_\ell$ ) de domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{K}^{\frac{1}{2}})$  où  $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(\mathcal{K}^{\frac{1}{2}})$  muni de la norme  $\|q\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}} = \|\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} q\|_{\mathbb{H}}$  définit un espace de Hilbert.

Grâce à ce cadre fonctionnel, on peut alors définir l'état de la corde  $x = [w, \partial_t w]^T$  sur l'espace de Hilbert  $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$  avec  $\mathbb{X}_1 = \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbb{X}_2 = \mathbb{H}$ , muni de la norme  $\|x\|_{\mathbb{X}} = (\|x_1\|_{\mathbb{X}_1}^2 + \|x_2\|_{\mathbb{X}_2}^2)^{\frac{1}{2}}$ , qui correspond à l'espace des énergies finies, données par  $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \|x\|_{\mathbb{X}}^2$ .

Pour le problème (4) linéaire ( $\varepsilon = 0$ ), d'entrée  $u = f$  et de sortie  $y = \partial_t w$ , la formulation hamiltonienne à ports (1) devient

$$\begin{cases} \partial_t x &= (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \delta_x \mathcal{H}(x) + \mathcal{G} u \\ y &= \mathcal{G}^* \delta_x \mathcal{H}(x) \end{cases} \quad (7)$$

où les opérateurs  $\nabla$ ,  $J$ ,  $R$ ,  $G$  et  $G^T$  ont été modifiés en

— la dérivée variationnelle  $\delta_x$  et où  $\delta_x \mathcal{H}(x = [w, \partial_t w]^T) = [\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} x_1, x_2]^T = [\partial_\ell w, \partial_t w]^T$ ,

— les opérateurs  $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ , respectivement anti-symétrique et symétrique positif pour le produit scalaire sur  $\mathbb{X}$ ,

— les opérateurs  $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$  et  $\mathcal{G}^* = [0, I]$ .

**Cas non linéaire** Le système hamiltonien à ports du système non linéaire est défini avec les mêmes entrée, état et sortie, et est bien posé dans le même cadre fonctionnel. Seul le hamiltonien est modifié en

$$\mathcal{H}_{\text{NL}}(x) = F \left( \frac{1}{2} \|x_1\|_{\mathbb{X}_1}^2 \right) + \frac{1}{2} \|x_2\|_{\mathbb{X}_2}^2 \text{ avec } F(V) = V + \varepsilon V^2, \quad (8)$$

où la variable muette  $V$  représente ici l'énergie potentielle quadratique du système linéarisé. En effet, ce hamiltonien génère bien l'énergie totale du problème non linéaire. De plus,  $F$  étant une bijection continue de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}_+$ , on remarque que l'énergie  $\mathcal{H}_{\text{NL}}$  est bornée si l'énergie du problème linéaire est borné, et réciproquement, de sorte que l'espace d'état  $\mathbb{X}$  reste bien l'espace des énergies finies pour le problème non linéaire.

Enfin, la deuxième composante de  $\mathcal{J} \delta_x \mathcal{H}_{\text{NL}}(x)$  est donnée par  $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} \delta_{x_1} [F \circ \mathcal{H}_1](x_1)$ , qui reconduit bien à la force élastique non linéaire du modèle (4). En effet, on a  $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} \equiv \partial_\ell$  et  $\delta_{x_1} [F \circ \mathcal{H}_1](x_1) = [F' \circ \mathcal{H}_1](x_1) \delta_{x_1} \mathcal{H}_1(x_1) = (1 + \varepsilon \|x_1\|_{\mathbb{X}_1}^2) \mathcal{H}_1(x_1)$  où  $\delta_{x_1} \mathcal{H}_1(x_1) = \mathcal{K}^{\frac{1}{2}} x_1 \equiv \partial_\ell x_1$ .

## 4 Décomposition modale et réduction d'ordre exacte

Les fonctions propres du problème linéaire ( $\varepsilon = 0$ ) sont données par

$$e_m : \ell \mapsto \sqrt{2} \sin(m\pi\ell), \quad m \geq 1, \quad (9)$$

pour le déplacement  $w$ . Elles forment une base orthonormée de  $\mathbb{H}$ .

Supposons que seuls les  $M$  premiers modes soient excités, c'est-à-dire que  $x_1 = w = E^T Q$  avec  $E(\ell) = [e_1(\ell), \dots, e_M(\ell)]^T$  et  $Q(t) = [q_1(t), \dots, q_M(t)]^T$ . Alors,  $x_2 = \partial_t w = E^T \frac{dQ}{dt}$ . Ainsi, l'état se réécrit  $x = B^T X$  où on a introduit  $B = \begin{bmatrix} E & 0_{M \times 1} \\ 0_{M \times 1} & E \end{bmatrix}$  et  $X = \left[ Q^T, \frac{dQ}{dt} \right]^T$  qu'on renote

$$X = \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} \in \widehat{\mathbb{X}} = \mathbb{R}^{2M}. \quad (10)$$

Dans ce cas, on trouve que l'opérateur spatial du système hamiltonien à port  $(\mathcal{J} - \mathcal{R})\delta_x \mathcal{H}_{NL}(B^T X) = B^T (J - R) \nabla H(X)$  s'écrit sur la même base, avec  $H(X) = \mathcal{H}_{NL}(B^T X)$ , c'est-à-dire,

$$H(X) = H_q(Q) + H_p(P) \quad (11)$$

$$\text{avec } H_q(Q) = F \circ V(Q) \text{ et } H_p(P) = \frac{1}{2} P^T P$$

$$\text{où } V(Q) = \left( \frac{1}{2} Q^T K Q \right) \text{ et } K = \text{diag}(1, 2^2, \dots, M^2) \pi^2,$$

$$J = -J^T = \begin{bmatrix} 0_{M \times M} & I_M \\ -I_M & 0_{M \times M} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$R = R^T = \begin{bmatrix} 0_{M \times M} & 0_{M \times M} \\ 0_{M \times M} & \alpha I_M \end{bmatrix} \geq 0. \quad (13)$$

Ainsi, bien que non linéaire sur  $\widehat{\mathbb{X}}$ , cet opérateur restreint à l'espace vectoriel  $\widehat{\mathbb{X}} = \text{span}(E) \times \text{span}(E)$  est à valeurs dans  $\widehat{\mathbb{X}}$ , de dimension  $2M$ .

Finalement, si l'entrée  $u = E^T U$  avec  $\widehat{U} = \mathbb{R}^M$  n'est excitée que sur les modes  $E$ , alors l'état  $x$  est confiné dans  $\widehat{\mathbb{X}}$  et la sortie n'est composée que des modes  $E$ . L'état et la sortie admettent des formes respectives  $x = B^T X$  avec  $X \in \widehat{\mathbb{X}}$  et  $y = E^T Y$  avec  $Y \in \widehat{Y} = \mathbb{R}^M$ .

Il s'en suit qu'une projection modale fournit une réduction d'ordre exacte, dont le Système Hamiltonien à Ports de dimension finie est décrit par (1) avec la fonction  $H$  et les matrices  $J$  et  $R$  introduites ci-dessus, et la matrice

$$G = \underbrace{[0, \dots, 0]}_M, \underbrace{[1, \dots, 1]}_M \Big]^T. \quad (14)$$

## 5 Méthode numérique à passivité garantie

La simulation du modèle de corde (4) peut être menée par différences finies (cf. [7] pour une méthode conservative). Dans cette section, une méthode numérique qui garantit le bilan de puissance dans le domaine à temps discret pour la décomposition modale est proposée.

### 5.1 Schéma numérique à passivité garantie

**Principe.** Pour simuler un système différentiel  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , la plupart des schémas numériques concentrent les efforts

sur l'approximation de la dérivée temporelle (ou de l'intégrateur) et l'exploitation du champ de vecteur  $f$ .

Ici, l'idée est de préserver le bilan de puissance (3) dans sa version à temps discret (cf. [5]). Cette opération est possible pour un schéma numérique qui restitue une version discrète de la règle de dérivation en chaîne pour la fonction composée  $E = H \circ X$

$$\frac{\delta E(t, \delta t)}{\delta t} = \nabla_d H(X, \delta X(t, \delta t))^T \frac{\delta X(t, \delta t)}{\delta t} \quad (15)$$

sur une grille temporelle  $t \in (\delta t) \mathbb{N}$ , où  $\delta t > 0$  est le pas de temps, où  $\nabla_d H(X, \delta X(t, \delta t))$  est un gradient discret du hamiltonien  $H$  introduit ci-dessous, et où  $\delta X(t, \delta t)/\delta t$  représente une différence finie approchant la dérivée temporelle de l'état, par exemple,

$$\frac{\delta X(t, \delta t)}{\delta t} = \frac{X(t + \delta t) - X(t)}{\delta t}. \quad (16)$$

#### Gradient discret d'un hamiltonien à variables séparées.

Lorsqu'un Hamiltonien d'un système de dimension  $N$  est de la forme  $H(X) = \sum_{n=1}^N H_n(X_n)$  (variables séparées), la définition

$$[\nabla_d H(X, \delta X)]_n = \begin{cases} \frac{H_n(X_n + \delta X_n) - H_n(X_n)}{\delta X_n} & \text{si } \delta X_n \neq 0, \\ H'_n(X_n) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (17)$$

fournit un gradient discret associé à (16). En effet, il restitue bien la règle de dérivation en chaîne puisqu'il conduit à  $\frac{\delta E(t, \delta t)}{\delta t} = \sum_{n=1}^N \frac{H_n(X_n(t+\delta t)) - H_n(X_n(t))}{\delta t} = \frac{H(X(t+\delta t)) - H(X(t))}{\delta t}$  (cf. Eq.(15)).

#### Gradient discret d'un hamiltonien à variables non séparées.

Le Hamiltonien (11) n'a pas une forme à variables séparées, de sorte que la définition précédente n'est pas exploitable. En notant  $H(X) = H(X_1, \dots, X_N)$ , un gradient discret qui restitue la règle de dérivation en chaîne peut encore être défini par [6]

$$\left[ \nabla_d^l H(X, \delta X) \right]_n = \begin{cases} \frac{H \circ \sigma_{n-1}(X, \delta X) - H \circ \sigma_n(X, \delta X)}{\delta X_n} & \text{si } \delta X_n \neq 0, \\ \partial_{X_n} [H \circ \sigma_n](X, \delta X) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (18)$$

où  $\sigma_0(X, \delta X) = X + \delta X$  et, pour  $1 \leq n \leq N$ ,  $\sigma_n(X, \delta X) = [X_1, \dots, X_n, X_{n+1} + \delta X_{n+1}, \dots, X_N + \delta X_N]^T$ . Toutefois, avec cette définition, le problème à temps discret n'est pas invariant avec l'ordre pris pour indexer les variables d'état. Plus précisément, pour une permutation  $\rho \in \mathcal{P}(N)$  (permutations de  $[1, N]_{\mathbb{N}}$ ), le gradient discret défini par

$$\nabla_d^\rho H(X, \delta X) = \nabla_d^l H_\rho(x_\rho), \quad (19)$$

fournit un gradient discret adéquat différent de  $\nabla_d^l$ , où l'on a introduit les notations  $H_\rho(x_\rho) = H(x)$  et  $x_\rho = [x_{\rho(1)}, \dots, x_{\rho(N)}]^T$ . Cette propriété est acceptable du point de vue numérique mais n'est pas compatible avec l'invariance qui est vérifiée dans le domaine à temps continu.

Pour cette raison, une définition unique de gradient discret, invariante avec l'ordre d'indexation, est choisie :

$$\nabla_d^* H(X, \delta X) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in \mathcal{P}(N)} \nabla_d^\rho H_\rho(x_\rho). \quad (20)$$

Il est à noter que, dans le cas d'un hamiltonien séparable, les expressions de (18) et (19) sont confondues avec (17).

**Système à temps discret** En notant  $X(k \delta t)$  sous la forme simplifiée  $X(k)$  pour alléger l'écriture (idem pour  $\delta X$ ,  $U$  et  $Y$ ), le système à temps discret est décrit par le problème (à résoudre en  $\delta X(k)$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta X(k)}{\delta t} &= (J - R)\nabla_d^* H(X(k), \delta X(k)) + GU(k), \\ Y(k) &= G^T \nabla_d^* H(X_k, \delta X(k)). \end{aligned} \quad (21)$$

## 5.2 Résolution

On cherche à bénéficier de la structure en  $H_q(Q) = F \circ V(Q)$  de la partie non quadratique de l'énergie, de sorte à

- garantir la colinéarité de  $X$  et de  $(J - R)\nabla_d^* H(X, \delta X)$ ,
- réduire la complexité de résolution sur  $H_q$  (hamiltonien non quadratique et à variables non séparées) en traitant séparément les de  $F$  (fonction scalaire) et  $V$  (énergie quadratique à variables séparées).

Pour cela, on fait apparaître explicitement le gradient discret de  $H_q$  en fonction de celui de  $F$  et celui de  $V$ . En effet, la règle de dérivation en chaîne s'applique au gradient discret (20) et conduit à

$$\nabla_d^* H(X, \delta X) = \begin{bmatrix} \nabla_d F(V, \delta V) \nabla_d V(Q, \delta Q) \\ \nabla_d H_p(P, \delta P) \end{bmatrix} \quad (22)$$

avec  $\delta V = \nabla_d V(Q, \delta Q)^T \delta Q$  et où  $\nabla_d F(V, \delta V) = 1 + 2\varepsilon(V + \delta V/2) = \nabla_d^* F(V, \delta V)$  puisque  $F$  est une fonction scalaire, et  $\nabla_d V(Q, \delta Q) = K(Q + \delta Q/2) = \nabla_d^* V = \nabla_d^* V(Q, \delta Q)$  puisque  $V$  est à variables séparées ( $K$  est diagonale). On exploite (22) dans (21) et en appliquant, pour chaque temps  $k$  (non indiqué ci-dessous), la méthode de résolution itérative suivante :

- A.** On initialise  $i = 0$  (itération) et on calcule la tension  $\mathcal{F}(i = 0) = \nabla_d F(V, 0)$  qui correspond au niveau d'énergie  $V$  (à l'instant  $k$ ) ;
- B(i).** On calcule la solution  $\delta X^{(i)}$  du système linéaire correspondant à (21) avec (22) dans lequel  $\nabla_d F(V, \delta V)$  est remplacé par la constante scalaire  $\mathcal{F}(i)$  ;
- C(i).** On calcule  $\delta V^{(i)} = \nabla_d V(Q, \delta Q^{(i)})^T \delta Q^{(i)}$  ;
- D(i).** On calcule  $\mathcal{F}(i + 1) = \nabla_d F(V, \delta V^{(i)})$  ;
- E(i).** Si la variation de tension  $\mathcal{F}(i + 1) - \mathcal{F}(i)$  est inférieure à un seuil (par exemple,  $10^{-6}$ ), la solution de (21) est approchée par  $\delta X = \delta X^{(i)}$  ; sinon, on incrémente l'itération  $i \leftarrow i + 1$  et on reprend à l'étape B(i).

L'intérêt de cet algorithme est :

**Faible coût de l'étape B :** l'étape B peut se ramener à  $2M$  équations impliquant une somme de 2 termes, dont un est proportionnel à  $\mathcal{F}$  et l'autre en est indépendant, combinée à une division par un seul facteur affine en  $\mathcal{F}$  commun aux  $2M$  équations ;

**Accélération de convergence :** la procédure [C(i),D(i),B(i+1)] construit une fonction  $f$  et l'algorithme résout son point fixe  $\delta X = f(\delta X)$  ; cette procédure accélère significativement la convergence, comparé à la méthode du point fixe appliqué à (21), puisque l'erreur est en  $O(\varepsilon)$ .

L'analyse précise de la convergence de l'algorithme sera menée dans un travail ultérieur.

## 6 Simulation et résultats

Les simulations ont été effectuées pour les paramètres physiques d'une corde de contrebasse de longueur  $L = 1,8\text{m}$ , accordée à la fréquence de 55Hz. Les paramètres du matériaux correspondent à un acier standard avec pour module de Young  $E = 210\text{GPa}$  et une masse volumique  $\rho = 7800\text{kg.m}^{-3}$ . L'amortissement choisit empiriquement a pour valeur  $\alpha = 3\text{s}^{-1}$ .

### 6.1 Simulation à passivité garantie

La figure 2 montre l'évolution temporelle des énergies cinétiques et potentielle (définies par l'Eq. (11)) ainsi que leur somme pour une simulation avec un amortissement nul. Ainsi, on observe que le bilan de puissance est préservé puisque l'énergie du système est constante au cours du temps une fois la force d'excitation appliquée à la corde.

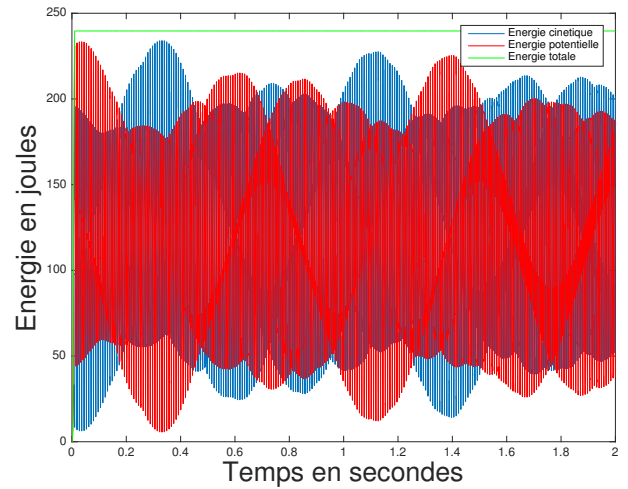


FIGURE 2 – Energie du système pour une simulation avec amortissement nul ( $\alpha = 0$ ).

### 6.2 Dynamique non linéaire

La figure 3 montre que le spectrogramme de la vitesse de la corde en un point pour différents niveaux de force d'excitation  $f_{max} = 10, 20, 40$  ou  $80\text{N.m}^{-1}$ . Ces figures permettent d'observer l'apparition de phénomènes non linéaires prévus dans le modèle (Eq. (4)) en fonction de l'augmentation du niveau d'excitation. Pour les deux premières valeurs, les fréquences observables sur le spectrogramme ne varient pas, ce qui permet de considérer que la simulation pour ces niveaux de force est identique à celle du modèle linéaire. Cependant pour les deux valeurs suivantes (40 et  $80\text{N.m}^{-1}$ ) l'on peut remarquer que les fréquences des partiels ont des valeurs supérieures à celles observées dans le cadre de l'hypothèse linéaire pour le début du son. Puis l'action de l'amortissement diminue l'énergie de la corde et entraîne une diminution des fréquences qui tendent vers les valeurs des fréquences propres.

## 7 Conclusion

Ce travail a permis de mettre en évidence l'intérêt des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP) pour la réécriture du modèle de corde de Kirchhoff-Carrier.

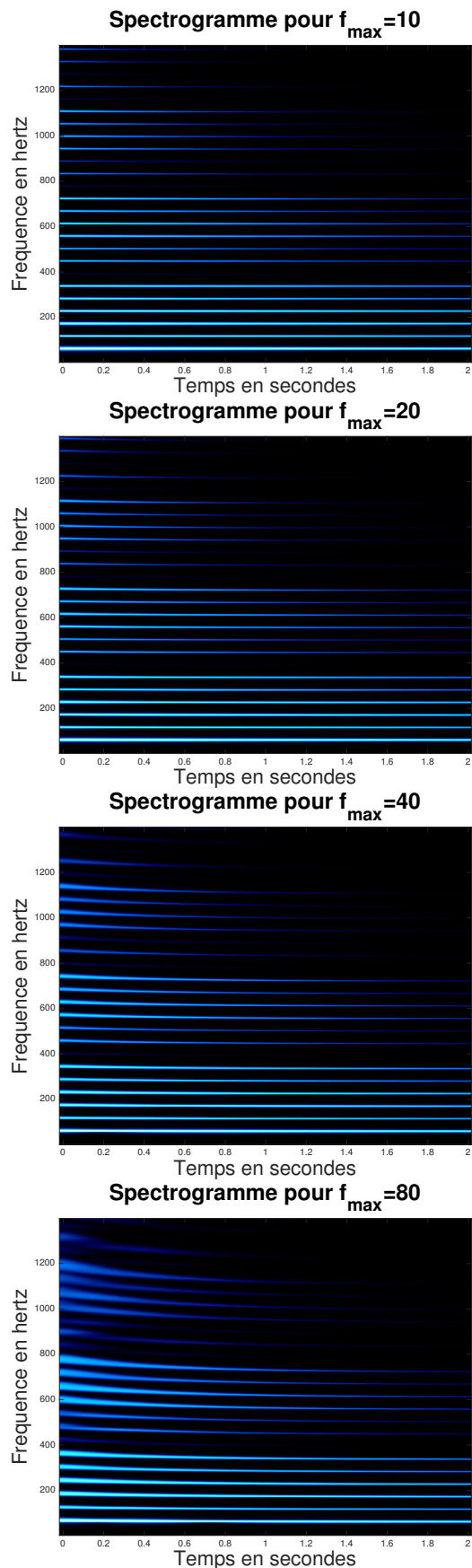


FIGURE 3 – Spectrogrammes de la vitesse de la corde en un point pour différentes amplitudes d’excitation.

La définition d’un gradient discret a permis d’écrire une structure de résolution implicite. Une méthode de résolution itérative a été proposée et la simulation à passivité garantie du problème a été réalisée.

Une prochaine étape consistera à remplacer le schéma itératif par un formulation explicite avec un ordre de consistance garanti.

## Références

- [1] A. J. van der Schaft and D. Jeltsema, *Port-Hamiltonian Systems Theory : An Introductory Overview*, Now Publishers Inc, Boston - Delft (2014).
- [2] G. Carrier, On the nonlinear vibration problem of the elastic string, *Quarterly of Applied Mathematics*, 157-165 (1945).
- [3] T. Hélie, D. Matignon. Nonlinear damping models for linear conservative mechanical systems with preserved eigenspaces : a port-Hamiltonian formulation. *Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control*, Lyon, France (2015).
- [4] R. F. Curtain and H. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer, New York (1995).
- [5] T. Hélie, A. Falaize, and N. Lopes, Systèmes Hamiltoniens à ports avec approche par composants pour la simulation à passivité garantie de problèmes conservatifs et dissipatifs, *12ème Colloque National en Calcul des Structures*, Computational Structural Mechanics Association (2015).
- [6] S. Aoues, *Schémas d’intégration dédiés à l’étude, l’analyse et la synthèse dans le formalisme hamiltonien à ports*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon (2014).
- [7] S. Bilbao and J.O. Smith III, Energy-conserving finite difference schemes for nonlinear strings, *Acustica*, 91 :299-311 (2005).