

# Systèmes Hamiltoniens à Ports avec approche par composants pour la simulation à passivité garantie de problèmes conservatifs et dissipatifs

T. Hélie<sup>1</sup>, A. Falaize<sup>1</sup> et N. Lopes<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique et du Son, IRCAM-CNRS-UPMC, 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris.  
{thomas.helie,antoine.falaize,nicolas.lopes}@ircam.fr

**Résumé** — Les Systèmes Hamiltoniens à Ports sont des systèmes dynamiques ouverts passifs, structurés en parties conservatives, dissipatives et externes (via des ports d'interaction). On en donne une présentation introductive simple et illustrée, avec une approche qui permet de générer les équations par connexion de composants élémentaires. On présente une méthode de simulation à passivité garantie, préservant un bilan de puissance en temps discret. Cette méthode regénère la méthode du point milieu dans le cas des systèmes linéaires et distincte sinon. Des résultats numériques illustrent l'intérêt de l'approche.

**Mots clés** — Systèmes Hamiltoniens à Ports, Simulation à passivité garantie, Non-linéarités.

Cette contribution entre dans le cadre du projet ANR Hamecmopsys (<https://hamecmopsys.ens2m.fr/>).

## 1 Systèmes Hamiltoniens à Ports

On considère un système d'entrée  $u(t) \in \mathbb{U} = \mathbb{R}^P$ , d'état  $x(t) \in \mathbb{X} = \mathbb{R}^N$  et de sortie  $y(t) \in \mathbb{Y} = \mathbb{R}^P$ , gouverné par la représentation d'état structurée (cf. [1])

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= (J(x) - R(x)) \nabla H(x) + G(x)u \\ y &= G(x)^T \nabla H(x) \end{cases} \quad (1)$$

où la fonction  $H$  exprime l'énergie totale stockée par le système

$$E(t) = H(x(t)) \quad \text{avec } H \in C^1(\mathbb{X}, \mathbb{R}^+) \text{ définie positive,} \quad (2)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient,  $J = -J^T$  une matrice anti-symétrique et  $R = R^T \geq 0$  une matrice positive. La variation d'énergie d'un tel système satisfait le bilan de puissance

$$\frac{dE}{dt} = \left( \nabla H(x)^T \frac{dx}{dt} \right) = \underbrace{\nabla H(x)^T J(x) \nabla H(x)}_{P_c=0} - \underbrace{\nabla H(x)^T R(x) \nabla H(x)}_{Q \geq 0} + \underbrace{y^T u}_{P_{\text{ext}}}. \quad (3)$$

Le terme  $P_c$  est nul car  $J$  est anti-symétrique : il traduit les échanges de puissance entre éléments stockants et représente la partie conservative du système. Le terme  $Q$  est positif car  $R \geq 0$  : il représente la puissance dissipée. Le terme  $P_{\text{ext}}$  représente la puissance apportée au système par le milieu extérieur via les entrées-sorties (ports d'interaction). Le bilan (3) exprime la passivité du système : à sources externes éteintes ( $u = 0$ ), l'énergie peut être constante (cas conservatif  $Q = 0$ ) ou décroissante (cas dissipatif  $Q > 0$ ).

## 2 Approche par composants et forme algèbro-différentielle

On s'intéresse à des systèmes physiques constitués de  $N$  composants stockant de l'énergie,  $M$  composants dissipatifs et  $P$  ports d'interaction avec le milieu extérieur. Pour simplifier la présentation, on considère ici des composants mono-variants (l'état ne dépend que d'une variable) et décrits par :

- Stockants ( $1 \leq n \leq N$ ) : le niveau d'énergie  $e_n (\geq 0)$  en fonction  $H_n$  (définie positive) d'un état  $x_n$  (élongation d'un ressort, charge électrique d'un condensateur, etc) ;
- Dissipatifs ( $1 \leq m \leq M$ ) : le niveau de puissance dissipée  $q_m (\geq 0)$  en fonction  $R_m$  (positive et nulle en 0) d'une variable  $w_m$ , typiquement de flux (vitesse, intensité, débit acoustique, etc) ou d'effort (force, tension électrique, pression acoustique, etc) ;

- Ports ( $1 \leq p \leq P$ ) : les variables de flux et effort, l'une (contrôlable) étant définie comme une entrée du système ( $u_p$ ), l'autre (réponse observable de cette sollicitation) comme une sortie ( $y_p$ ), et le produit  $u_p y_p$  quantifiant la puissance apportée au système.

La puissance reçue par un composant stockant  $n$  isolé est  $\frac{de_n}{dt} = \frac{dx_n}{dt} H'_n(x_n)$  de sorte que si  $\frac{dx_n}{dt}$  est une variable de flux (/effort), alors  $H'_n(x_n)$  représente la variable d'effort (/flux) associée et fournit la loi physique qui la gouverne. De même, la puissance reçue par un composant dissipatif  $m$  est  $q_m = R_m(w_m)$  de sorte que si  $w_m$  est une variable de flux (/effort), alors  $z_m(w_m) = R_m(w_m)/w_m$  représente la variable d'effort (/flux) associée et fournit la loi physique qui la gouverne.

On considère alors un système passif obtenu en connectant ces éléments et gouverné par (cf. [2, 3])

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ w \\ -y \end{bmatrix}}_B = S(x, w) \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla H(x) \\ z(w) \\ u \end{bmatrix}}_A \quad \text{avec } H(x) = \sum_{n=1}^N H_n(x_n) \text{ et } z(w) = [z_1(w_1), \dots, z_M(w_M)]^T, \quad (4)$$

où  $S = -S^T$  est anti-symétrique. La matrice  $S$  formalise les échanges de puissance entre composants : puisque  $S = -S^T$ , on a  $0 = A^T S A = B^T A$ , qui conduit au bilan de puissance

$$0 = \underbrace{\frac{dx^T}{dt} \nabla H(x)}_{\frac{dE}{dt}} + \underbrace{w^T z(w)}_{\sum_{m=1}^M q_m = Q \geq 0} - \underbrace{y^T u}_{P_{\text{ext}}} \quad (5)$$

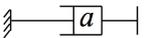
(le signe "-" est appliqué sur la sortie  $y$  dans (4) pour rétablir la convention récepteur, comme pour les composants internes). La forme (1) se retrouve en éliminant  $w$  par résolution de la seconde ligne de (4). La matrice  $S$  correspond à une *structure de Dirac* (structure générale traduisant des échanges de puissance équilibrés), que l'on peut construire à partir d'un graphe de connexion des composants [4].

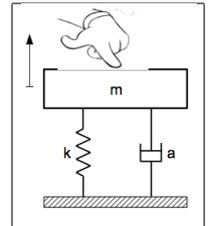
### 3 Illustration : système masse-amortisseur-ressort excité par une force

On illustre la mise en équation du système décrit en Tab. 1, pour lequel  $N = 2$ ,  $M = 1$  et  $P = 1$ .

**Étape 1 : description des composants et constitution des vecteurs  $A$  et  $B$ .** Les composants peuvent être décrits par le dictionnaire donné en tableau 1 (cas linéaire). D'après ce tableau, les variables de flux (ici, vitesse) et d'effort (ici, force) sont regroupés dans les vecteurs  $A$  et  $B$  comme suit

$$A = [v_1, F_2, F_3, F_4]^T \quad \text{et} \quad B = [F_1, v_2, v_3, v_4]^T. \quad (6)$$

Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	$\uparrow \downarrow$
	$x_1 = \text{qté de mvt}$	$H_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{dx_1}{dt}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$	$\uparrow$
	$x_2 = \text{élongation}$	$H_2(x_2) = \frac{k}{2} x_2^2$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$F_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$\uparrow$
	$w_3 = \text{vitesse}$	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w$	$F_3 = z_3(w_3)$	$\uparrow$
Excitation	$\emptyset$	$\emptyset$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$	$\downarrow$



TAB. 1 – Dictionnaire des composants élémentaires formant un système linéaire masse-amortisseur-ressort soumis à une force extérieure, et conventions d'orientation.

**Étape 2 : connexion des composants et matrice  $S$ .** Les composants sont rendus solidaires : les vitesses sont identiques et les forces équilibrées. Pour ce type de connexion, compte-tenu des choix d'orientations (positives pour les composants 1,2,3, et négative pour le port d'interaction, cf. Tab. 1), on trouve

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

La première ligne de  $S$  correspond à l'équilibre des forces, les suivantes traduisent l'égalité des vitesses. Les matrices  $J$  et  $R$  sont obtenues en résolvant de la partie algébrique de (1).

## 4 Simulation à passivité garantie

Pour assurer la stabilité des simulations d'un système dynamique stable  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , la plupart des schémas numériques concentrent les efforts sur la qualité d'approximation de la dérivée temporelle (ou l'intégration), combinée à l'exploitation du champ de vecteurs  $f$ . Ici, on cherche à préserver la passivité en transposant le bilan de puissance (3) (ou (5)) en temps discret. Cette opération est possible pour un schéma numérique qui restitue une version discrète de la règle de Leibniz pour la composée de fonction  $E = H \circ x$ . C'est le cas du schéma d'Euler, pour lequel les applications différentielles sont substituées par

$$dx(t, dt) = x'(t) dt \longrightarrow \delta x(t, \delta t) = x'_d(t, \delta t) \delta t := x(t + \delta t) - x(t) \text{ sur la grille } t \in (\delta t)\mathbb{Z}, \quad (8)$$

$$dH(x, dx) = \nabla H(x)^T dx \longrightarrow \delta H(x, \delta x) = \nabla_d H(x, \delta x)^T \delta x := H(x + \delta x) - H(x), \quad (9)$$

où  $\delta t > 0$  et où le gradient discret est défini par (cas de composants mono-variants :  $H(x) = \sum_{n=1}^N H_n(x_n)$ )

$$[\nabla_d H(x, \delta x)]_n = [H_n(x_n + \delta x_n) - H_n(x_n)] / \delta x_n \text{ si } \delta x_n \neq 0 \text{ et } [\nabla_d H(x, 0)]_n = H'_n(x_n) \text{ sinon.} \quad (10)$$

En effet, on retrouve une règle de Leibniz

$$\delta E(t, \delta t) / \delta t = \nabla_d H(x, \delta x(t, \delta t))^T \delta x(t, \delta t) / \delta t, \quad (11)$$

de sorte que la substitution  $(dx(t)/dt, \nabla H(x)) \longrightarrow (\delta x(t, \delta t)/\delta t, \nabla_d H(x, \delta x(t, \delta t)))$  dans (1) et (4) reconduit aux bilans de puissance (3) et (5) avec la même substitution (cf. [2, 5]). Pour des composants multi-variants, un gradient discret qui vérifie cette règle peut encore être défini (cf. [6]).

En résumé, cette méthode répartit les efforts sur deux approximations : celle des applications différentielles et celle du champ de vecteur  $f = (J - R)\nabla H \rightarrow f_d = (J - R)\nabla_d H$ . Les SHP (1) et (4) deviennent

$$\textcircled{a} \begin{cases} \frac{\delta x_k}{\delta t} = (J(x_k) - R(x_k)) \nabla_d H(x_k, \delta x_k) + G(x_k) u_k \\ y_k = G(x_k)^T \nabla_d H(x_k, \delta x_k) \end{cases} \text{ et } \textcircled{b} \begin{bmatrix} \delta x_k / \delta t \\ w_k \\ -y_k \end{bmatrix} = S(x_k, w_k) \begin{bmatrix} \nabla_d H(x_k, \delta x_k) \\ z(w_k) \\ u_k \end{bmatrix} \quad (12)$$

où l'on a introduit les notations  $x_k := x(k\delta t)$  (idem pour  $u$ ,  $y$  et  $w$ ) et  $\delta x_k = \delta x(k\delta t, \delta t)$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Ces équations implicites en  $\delta x_k$  (et  $w_k$ ) admettent une solution unique dans de nombreux cas ( $H$  convexe et  $z$  croissant bijectif sur le domaine réel complet). Toutefois, elles requièrent un solveur (typiquement, un algorithme de Newton-Raphson). Après résolution, la remise à jour du vecteur d'état est donnée par

$$x_{k+1} = x_k + \delta x_k. \quad (13)$$

Une étude montre que (cf. [7] pour les hypothèses techniques) : (i) la consistance du schéma est d'ordre 1 en général et 2 si  $J$  et  $R$  ne dépendent pas de  $(x, w)$ , (ii) un raffinement (de type Runge-Kutta) permet d'atteindre l'ordre 2, (iii) la méthode peut être rendue explicite pour la forme (1) lorsque  $H$  est convexe.

**Cas des systèmes à composants stockants linéaires.** Le point (iii) est immédiat dans le cas où l'énergie est quadratique ( $H(x) = \frac{1}{2}x^T W x$  avec  $W = W^T > 0$ ), et forme des lois constitutives linéaires ( $\nabla H(x) = Wx$ ). Le gradient discret  $\nabla_d H(x, \delta x) = W(x + \delta x/2)$  régénère alors la *méthode du point milieu* puisque

$$\nabla_d H(x_k, \delta x_k) = W(x_k + \delta x_k/2) = \nabla H\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right). \quad (14)$$

L'équation dynamique de (12a) admet alors pour solution  $\delta x_k = (I_N - \frac{\delta t}{2} M(x_k))^{-1} (M(x_k) x_k + G(x_k) u_k) \delta t$  avec  $M = (J - R)W$ , où la première matrice est inversible par construction.

## 5 Application

Une simulation de l'exemple (cf. Tab. 1) est représentée en Fig. 1a pour les paramètres  $m = 0.1$  Kg,  $k = 3$  kN/m,  $a = 0.1$  N.s/m, avec  $\delta t = 5$  ms. Les conditions initiales sont  $x = [0, \ell_0]^T$  avec  $\ell_0 = 0.1$  m. La force extérieure est choisie nulle, excepté sur l'intervalle [5s, 10s] où elle vaut  $F = k\ell_0/2 = 0.25$  N.

Une seconde simulation pour un ressort raidissant décrit par  $H_2^{\text{NL}}(x_2) = kL^2 [\cosh(x_2/L) - 1]$  (loi constitutive  $F_2 = (H_2^{\text{NL}})'(x_2) = kL \sinh(x_2/L)$ ) est présentée en Fig. 1b, pour les mêmes conditions, et pour une action raidissante se manifestant au-delà de  $L = \ell_0/4 = 25$  mm. Dans ce cas, le gradient discret ne génère plus la méthode du point milieu et les  $\delta x_k$  sont à résoudre (ici, par un algorithme itératif).

Sur les figures, on observe la décroissance de l'énergie dans les zones sans source ( $u = F_{\text{ext}} = 0$ N) ainsi que les effets de distorsion et de variation de fréquence, dus à l'effet raidissant du ressort.

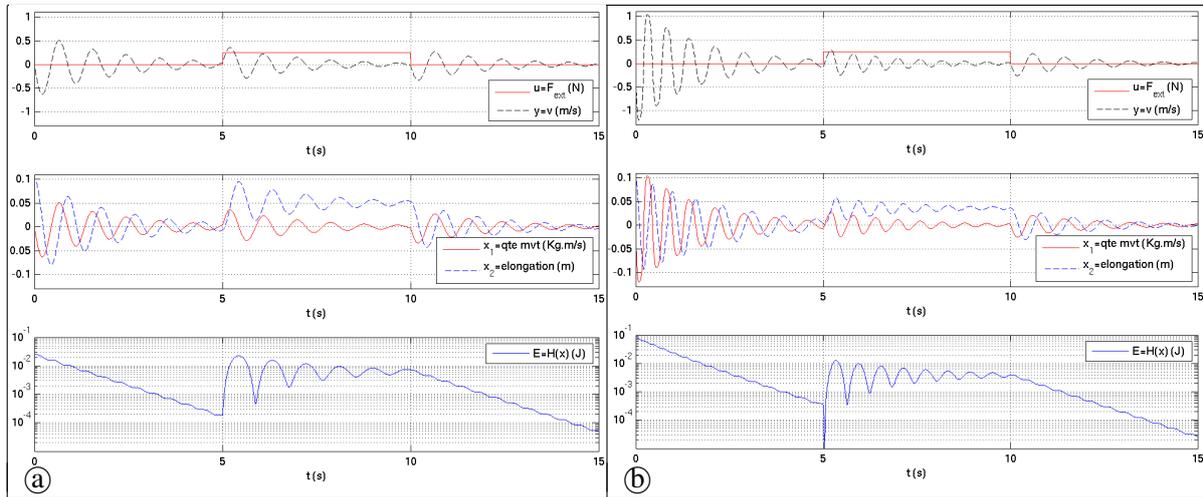


FIG. 1 – Simulations du système masse-amortisseur ressort dans le cas linéaire (a) et non linéaire à ressort raidissant (b). En haut : entrée/sortie ; au centre : état ; en bas : énergie totale.

## 6 Remarques conclusives

Cette contribution donne une présentation des systèmes Hamiltoniens à ports (SHP) pour des cas en dimension finie. Elle illustre un principe modulaire pour leur mise en équation, qui s'appuie sur un dictionnaire de composants physiques. Elle propose aussi une méthode de simulation à passivité garantie.

Comparés aux systèmes Hamiltoniens, les SHP n'imposent pas un état de dimension paire mais juste des échanges de puissance équilibrés, entre les composants conservatifs, dissipatifs et le milieu extérieur. Des travaux récents intègrent aussi des phénomènes hystérétiques [8] ou à modèle entropique [9]. Ces éléments s'étendent aux problèmes multi-physiques de dimension finie et infinie [10, 11] et couvrent des domaines allant de l'électronique, la vibro-aéro-acoustique [3], la mécanique [12] au génie des procédés ou des applications complexes comme le tokamak [13]. Enfin, les SHP s'appliquent à des problèmes de contrôle en bénéficiant du fait que  $H$  fournit une fonction de Lyapunov naturelle du système.

Pour une présentation générale, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage récent [1].

## Références

- [1] A. J. van der Schaft and D. Jeltsema. *Port-Hamiltonian Systems Theory : An Introductory Overview*. NOW Publishing Inc., 2014.
- [2] A. Falaize and T. Hélie. Simulation of an analog circuit of a wah pedal : a port-hamiltonian approach. In *135th convention of the Audio Engineering Society*, pages 1–9, 2013.
- [3] A. Falaize, N. Lopes, T. Hélie, D. Matignon, and B. Maschke. Energy-balanced models for acoustic and audio systems : a port-Hamiltonian approach. In *Unfold Mechanics for Sounds and Music*, pages 1–8, 2014.
- [4] A. J. van der Schaft and B. Maschke. Port-hamiltonian systems on graphs. *SIAM J. on Control and Optimization*, 51(2) :906–937, 2013.
- [5] T. Usciati. Analyseur de circuit électronique analogique audio, et génération automatique de code pour la simulation temps réel. Master's thesis, M2 ATIAM, UPMC, 2012.
- [6] S. Aoues. *Schémas d'intégration dédiés à l'étude, l'analyse et la synthèse dans le formalisme Hamiltonien à ports*. PhD thesis, INSA, 2014.
- [7] N. Lopes, T. Hélie, and A. Falaize. Explicit second-order accurate method for the passive guaranteed simulation of port-hamiltonian systems. In *IFAC-LHMNLC*, pages 1–6.
- [8] D. Habineza, M. Rakotondrabe, and Y. Le Gorrec. Bouc-Wen modeling and feedforward control of multivariable hysteresis in piezoelectric systems : Application to a 3-dof piezotube scanner. *IEEE-TCST*, 2015.
- [9] B. Maschke H. Ramirez and D. Sbarbaro. Modelling and control of multi-energy systems : An irreversible port-hamiltonian approach. *European Journal of Control*, 19(6) :513–520, 2013.
- [10] A. J. van der Schaft and B. Maschke. Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow. *J. of Geometry and Physics*, 42(1) :166–194, 2002.
- [11] J. Villegas. *A Port-Hamiltonian Approach to Distributed Parameter Systems*. PhD thesis, Univ. Twente, 2007.
- [12] T. Hélie and D. Matignon. Nonlinear damping models for linear conservative mechanical systems with preserved eigenspaces : a port-hamiltonian formulation. In *IFAC-LHMNLC*, volume 5, pages 1–6.
- [13] L. Lefèvre N. M. T. Vu and B. Maschke. Port-hamiltonian formulation for systems of conservation laws : application to plasma dynamics in tokamak reactors. In *IFAC-LHMNLC*, pages 108–113, 2012.