

Physique de la dynamique glottique: aspects énergétiques et auto-oscillations

Thomas Hélie
thomas.helie@ircam.fr

Equipe Systèmes et Signaux Sonores
Lab. Sciences et Tech. Musique et Son
IRCAM – CNRS – UPMC
1, pl. Igor Stravinsky
75004 Paris, France

Fabrice Silva
silva@lma.cnrs-mrs.fr

Equipe Matériaux et Structures
Lab. Mécanique et Acoustique
CNRS – AMU – ECM
Technopole Chateau-Gombert
Marseille

Ecole d'Été Sciences et Voix (EESV'2016)
Septembre 2016, Porquerolles

Constat

1- L'appareil vocal : un système complexe

- **Complexité bio-physique** : mécanique des solides déformables (multi-échelles), mécanique des fluides, acoustique
- **Complexité des comportements** : grande variété de régimes (mécanismes \equiv partie visée par un bon contrôle)
- **Complexité du contrôle** : naviguer dans ces régimes \equiv apprentissage long

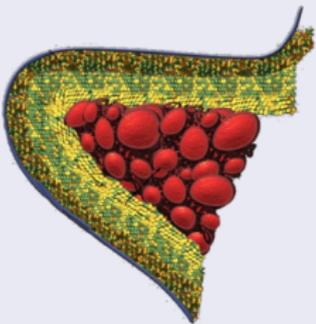
2- L'appareil vocal : un système structuré

- **Une seule source active** : la source d'air.
- **Partie "aval" passive** : les **auto-oscillations** émergent de la configuration de l'appareil vocal et de **non-linéarités**
- **Bilans physiques respectés** quelles que soient la complexité des phénomènes et des constituants
(\rightarrow transferts d'énergie équilibrés, cause/conséquence, etc)

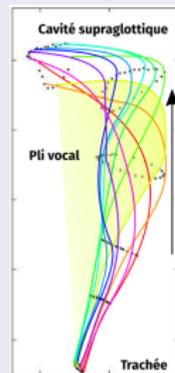
Complexité bio-physique : illustrations

Biomécanique des plis vocaux (cours E2)

Structures multi-couches
hétérogènes



Vibration non uniforme



Profil mid-coronal
ex-vivo hémilarynx

(Boessenecker, 2007)

Complexité bio-physique : illustrations (suite)

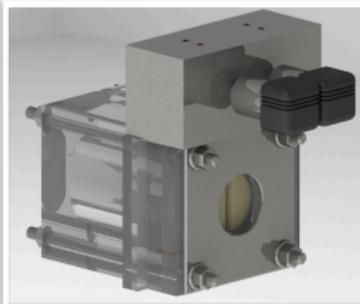
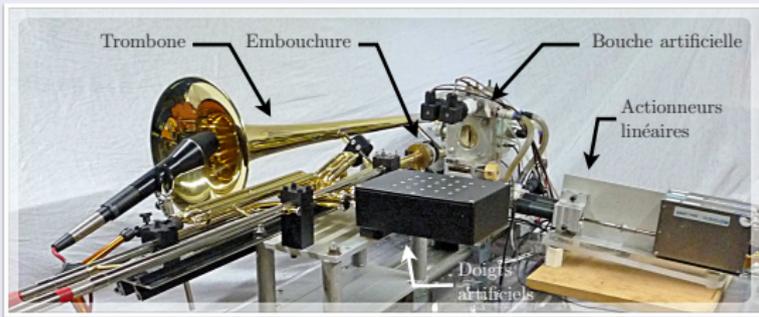
Acoustique du conduit vocal et articulation (cours E5)

- Propagation dans les voies aériennes
- Articulation
- Implication des sinus ?
- Rayonnement
- Aéroacoustique des sifflantes, etc. . .



Complexité des comportements

Illustration sur un système similaire contrôlé : le jeu des cuivres

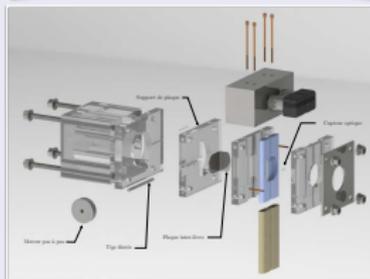


Valve humaine ↔ **résonateur acoustique**

Voix : **larynx** ↔ **conduit vocal**

Cuivre : **lèvres** ↔ **instrument**

FILM (2009) : contrôle d'aire d'ouverture *a* d'une électro-vanne (*paramètres de lèvres fixés*)



THESE (2016) : Nicolas Lopes (<http://medias.ircam.fr/x2c52cb>) :

Approche passive pour la modélisation, la simulation et l'étude d'un banc de test robotisé pour les instruments de type cuivre

Complexité des comportements

FILM : qu'observe-t-on ?

D'abord, a augmente :

1. $0 \leq a < a_1$: pas de son (*déplacement du point d'équilibre*)
2. $a = a_1$: apparition d'une auto-oscillation périodique (note 1)
3. $a > a_1$:
 - 3.1. modification de l'amplitude, de la fréquence de jeu, du timbre
 - 3.2. puis, apparition d'une rugosité

Puis, a diminue :

4. disparition progressive de la rugosité
5. $h = h_2 (< h_1 !)$: saut vers une note 2 plus basse que la note 1
6. $h = h_3 (< h_2)$: extinction du son

- Multiplier a par un facteur f ne multiplie pas la sortie par f :
→ le système dynamique est **non-linéaire** :
c'est cela qui permet l'auto-oscillation !
- Changements brutaux (2, 5, 6) ou progressifs (3.1, 3.2)
- Effets de mémoire et phénomènes d'hystérésis (5,6).

Motivations et approche

Motivations générales : modéliser, examiner et comprendre l'appareil vocal

- Principes de la physique et formulations mathématiques
- Outils technologiques expérimentaux (maquette 1 :1 robotisée)
- Expérimentations & validation "mesures/simulations"

Approche du cours : bénéficier de la structure physique dans le traitement de la complexité

- 1 Garantie des principes physiques généraux : bilan énergétique équilibré, causalité, etc.
- 2 Modélisation minimale (mais modulaire !) capable d'expliquer la phonation
- 3 Simuler, tester, interpréter le modèle minimal (pour le faire évoluer)

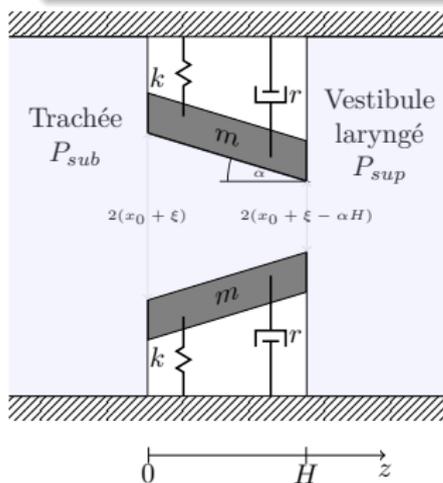
Plan

- 1 Motivations
- 2 État de l'art : modèles minimaux de phonation
- 3 Systèmes physiques énergiquement bien posés
 - Systèmes physiques, énergie et simulation
 - Méthode de simulation
- 4 Modélisation de l'appareil vocal
- 5 Simulations, tests et interprétations
- 6 Contributions et perspectives

Auto-oscillations d'un oscillateur élémentaire

Objectif

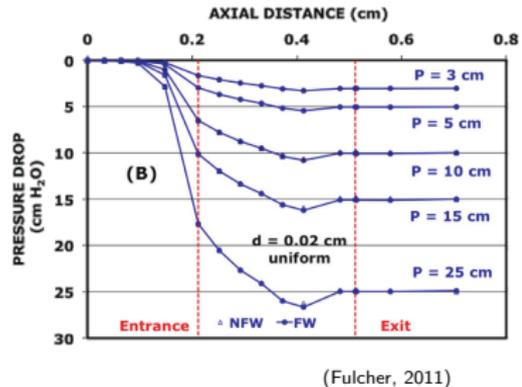
Quels sont les ingrédients nécessaires pour qu'un simple oscillateur masse-ressort-amortisseur soit susceptible de générer des oscillations sous l'effet d'une pression subglottique constante ?



- Plis : oscillateurs élémentaires
- Vibration transverse des plis
- Forces de pression dans le canal glottique uniquement
- Géométrie simpliste : canal glottique en forme de trapèze $a(z) = 2L_g (x_0 + \xi - \alpha z)$

Aérodynamique laryngée (van den Berg, 1957)

- Écoulement incompressible :
débit $U = a(z)v(z) = \text{cst}$
- Principe de Bernoulli dans le canal
 $P(z) + \frac{1}{2}\rho v(z)^2 = \text{cst} \quad 0 \leq z \leq H$
- En entrée $P_{sub} = P(0) + \frac{1}{2}k_c\rho\frac{U^2}{a(0)^2}$
Coefficient de contraction $k_c \simeq 1$
- En sortie, formation d'un jet et dissipation de l'énergie cinétique par turbulence
 $P_{sup} = P(H) + \frac{1}{2}k_e\rho\left(\frac{U}{a(H)}\right)^2$
Faible recouvrement de pression $k_e \simeq 0$



Le débit U dépend de la pression transglottique est $U \simeq a(H)\sqrt{2(P_{sub} - P_{sup})/\rho}$
La distribution de pression dans le canal glottique est :

$$P(z) \simeq P_{sub} - \frac{\rho U^2}{2a(z)^2} = P_{sub} - (P_{sub} - P_{sup})\frac{a(H)^2}{a(z)^2}$$

La résultante des forces de pression qui s'applique sur les plis est :

$$F_p(P_{sub}, P_{sup}, \xi, \alpha) \simeq HL_g \left(P_{sup} + (P_{sub} - P_{sup})\frac{\alpha H}{x_0 + \xi} \right)$$

Dynamique des cordes vocales rudimentaires

Eq. dynamique pour chaque pli :

$$m\ddot{\xi}(t) + r\dot{\xi}(t) + k\xi(t) = F_p(P_{sub}, P_{sup}, \xi, \alpha)$$

État d'équilibre en fonction de P_{sub}

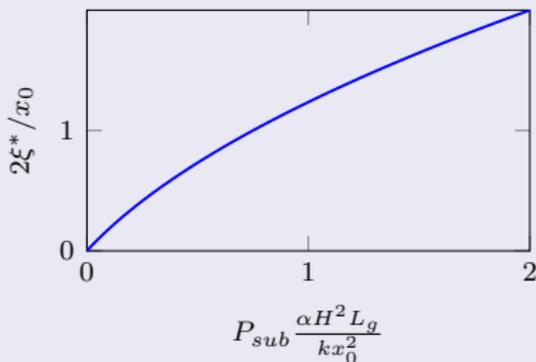
Hyp. : $\ddot{\xi}(t) = \dot{\xi}(t) = P_{sup} = 0$

On résout :

$$k\xi^* = F_p(P_{sub}, 0, \xi^*, \alpha)$$

$$\rightarrow \xi^* = f(P_{sub}, \alpha, k)$$

Canal droit $\alpha = 0 \Rightarrow \xi^* = 0$



Stabilité de l'état d'équilibre

Analyse linéaire de stabilité

On considère des petites perturbations autour de l'équilibre $\xi = \xi^* + \hat{\xi}(t)$ et on s'intéresse à la manière dont elles sont atténuées ou non.

Modèle 0 : pas de résonateur acoustique

Variations de la résultante des forces de pression :

$$m\ddot{\xi} + r\dot{\xi} + k(\xi^* + \hat{\xi}) = F_p(P_{sub}, 0, \xi^* + \hat{\xi}, \alpha)$$

$$\sim F_p(P_{sub}, 0, \xi^*, \alpha) + \frac{\partial F_p}{\partial \xi} \hat{\xi}$$

$$m\ddot{\hat{\xi}}(t) + r\dot{\hat{\xi}}(t) + \left(k - \frac{\partial F_p}{\partial \xi}\right) \hat{\xi}(t) = 0$$

Sa fréquence de résonance varie en conséquence...

... mais l'oscillateur est toujours amorti et ne sais pas auto-osciller !

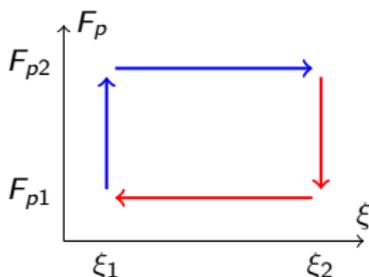
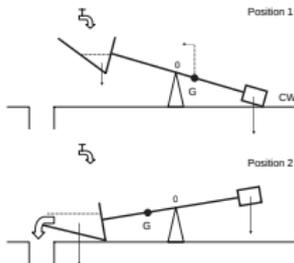
Comment le rendre capable d'auto-osciller ?

Il faut réussir à **modifier l'amortissement apparent**, par exemple avec des forces de pression glottique agissant **en déphasage** avec le mouvement des plis.

Pour cela F_p doit dépendre de $\dot{\xi}$

- en considérant un état fermé et un état ouvert
→ Garrel et coll. (2008)
- avec une charge acoustique inertielle → Flanagan & Landgraf (1968)
- avec une déformation du canal glottique : l'onde mucosale
→ Titze (1988), Lucero (2011)
- avec une modification de l'aérodynamique
Coefficient de décharge variable → Fulchner (2006), Zañartu (2007)
Point de séparation variable → McGowan (2010)
- en rajoutant des possibilités de mouvement aux masses.

Modèle 1 : oscillateur à relaxation (Garrel, 2008)



Analogie du vase à bascule :

- Phase de **stockage** : remplissage jusqu'à la bascule
- Phase de **relaxation** : vidage jusqu'au retour en haut

Comportement hystérétique de la force de pression glottique :

- en phase fermée, la pression subglottique s'accumule. . .
- jusqu'à ce que la glotte s'ouvre suffisamment. . .
- pour que la pression chute . . .
- et que les plis reviennent vers leur position d'équilibre.

C'est un modèle d'oscillations grandes amplitudes équivalent au « mouvement de Helmholtz » pour les instruments à cordes frottées.

Traitement analytique non trivial car F_p n'est pas régulière.

Modèle 2 : charge acoustique (Flanagan & Landgraf, 1968)

En-dessous des fréquences des formants, la charge est quasi-inertielle

$$P_{sup}(t) \propto \dot{U}(t) \propto \dot{\xi}(t) \sqrt{P_{sub}}$$

$$m\ddot{\xi}(t) + \left(r - \frac{\partial F_p}{\partial P_{sup}} c \sqrt{P_{sub}} \right) \dot{\xi}(t) + \left(k - \frac{\partial F_p}{\partial \xi} \right) \xi(t) = 0$$

- déphasage entre débit glottique et force de rétroaction sur les plis
- amortissement apparent qui diminue avec P_{sub}
- auto-oscillations possibles au-delà d'une pression de seuil

Modèle 3 : onde mucosale (Titze, 1988)

Propagation le long des plis à la vitesse c_m :

$$\xi\left(t - \frac{z}{c_m}\right) \sim \xi(t) - \dot{\xi}(t) \frac{z}{c_m} \equiv \xi(t) - \alpha z \text{ avec } \alpha = \frac{\dot{\xi}(t)}{c_m}$$

$$m\ddot{\xi}(t) + \left(r - \frac{\partial F_p}{\partial \alpha} \frac{1}{c_m}\right) \dot{\xi}(t) + \left(k - \frac{\partial F_p}{\partial \xi}\right) \xi(t) = 0$$

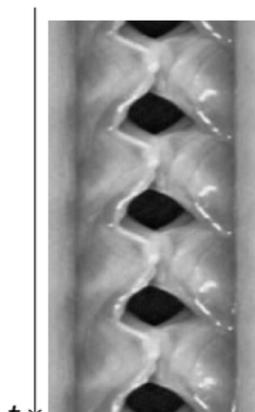
$$m\ddot{\xi}(t) + \left(r - \frac{H^2 L_g P_{sub}}{x_0 c_m}\right) \dot{\xi}(t) + k\xi(t) = 0$$

→ retard $\tau_m = H/c_m$ du bord amont sur le bord aval

→ amortissement diminue avec P_{sub}

→ auto-oscillations possibles au-delà d'un seuil

$$P_{onset} = r \frac{x_0 c_m}{H^2 L_g} = r \frac{x_0}{\tau_m H L_g}$$



Kymographe

(Qui, 2006)

Modèle 3 : onde mucosale (Titze, 1988)

Propagation le long des plis à la vitesse c_m :

$$\xi\left(t - \frac{z}{c_m}\right) \sim \xi(t) - \dot{\xi}(t) \frac{z}{c_m} \equiv \xi(t) - \alpha z \text{ avec } \alpha = \frac{\dot{\xi}(t)}{c_m}$$

$$m\ddot{\xi}(t) + \left(r - \frac{\partial F_p}{\partial \alpha} \frac{1}{c_m}\right) \dot{\xi}(t) + \left(k - \frac{\partial F_p}{\partial \xi}\right) \xi(t) = 0$$

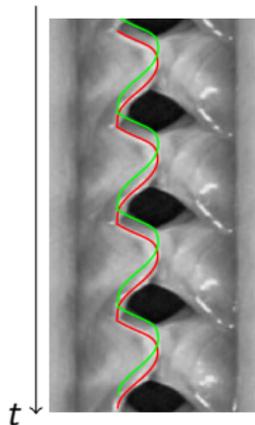
$$m\ddot{\xi}(t) + \left(r - \frac{H^2 L_g P_{sub}}{x_0 c_m}\right) \dot{\xi}(t) + k\xi(t) = 0$$

→ retard $\tau_m = H/c_m$ du bord amont sur le bord aval

→ amortissement diminue avec P_{sub}

→ auto-oscillations possibles au-delà d'un seuil

$$P_{onset} = r \frac{x_0 c_m}{H^2 L_g} = r \frac{x_0}{\tau_m H L_g}$$



Kymographe

(Qui, 2006)

Corrections du modèle aérodynamique

Modèle 4 : coefficient de décharge variable (Fulchner, 2006 ; Zaňartu, 2007)

Écart au modèle d'écoulement de Bernoulli :

$$U = C_d(t)a(H)\sqrt{\frac{2(P_{sub} - P_{sup})}{\rho}}$$

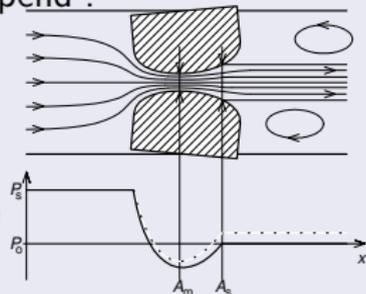
où C_d dépend de la vitesse d'ouverture du canal $\dot{\xi}(t)$

Modèle 4' : point de séparation variable (MacGowan, 2010)

Le jet se détache des parois à une abscisse dépend :

- de la géométrie du canal
- de la vitesse de l'écoulement

Le coefficient de décharge variable en est une conséquence.



(Liljencrants, 1995)

Corrections du modèle aérodynamique

Modèle 4 : coefficient de décharge variable (Fulchner, 2006 ; Zaïartu, 2007)

Écart au modèle d'écoulement de Bernoulli :

$$U = C_d(t)a(H)\sqrt{\frac{2(P_{sub} - P_{sup})}{\rho}}$$

où C_d dépend de la vitesse d'ouverture du canal $\dot{\xi}(t)$

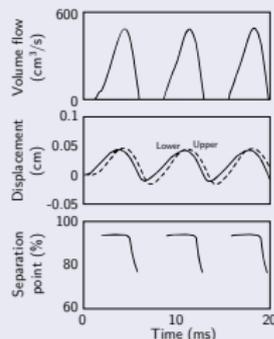
Modèle 4' : point de séparation variable (MacGowan, 2010)

Le jet se détache des parois à une abscisse dépend :

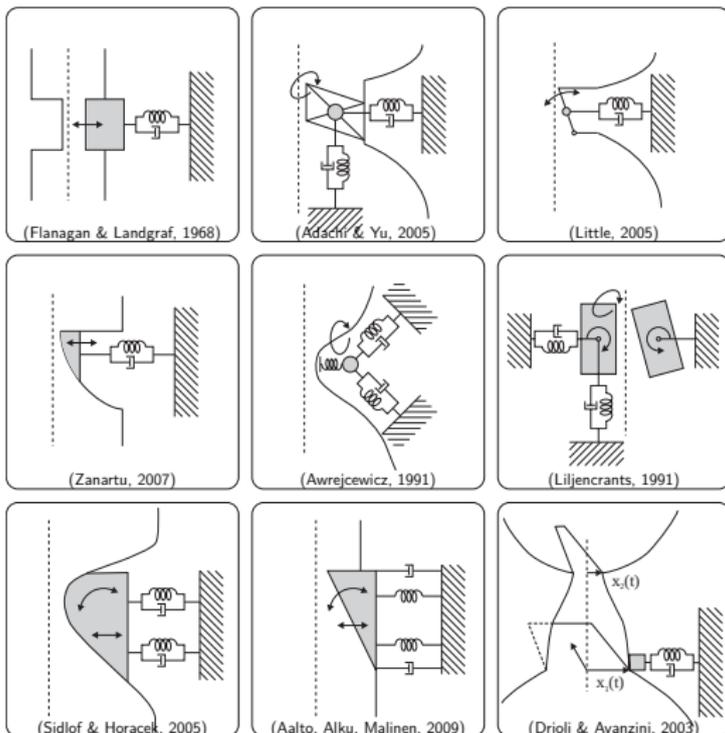
- de la géométrie du canal
- de la vitesse de l'écoulement

Le coefficient de décharge variable en est une conséquence.

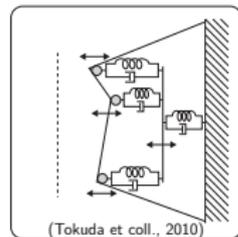
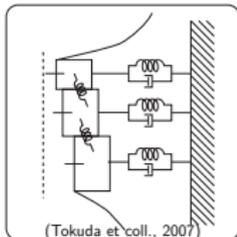
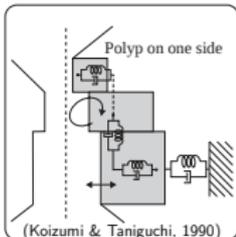
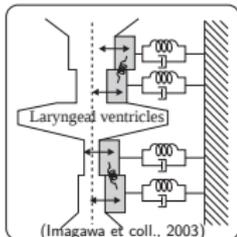
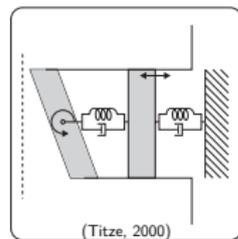
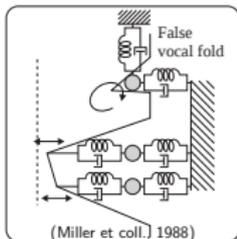
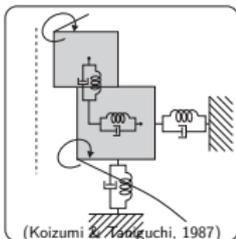
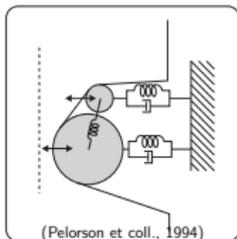
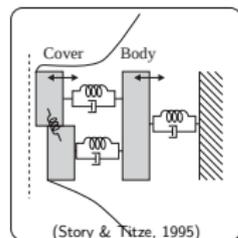
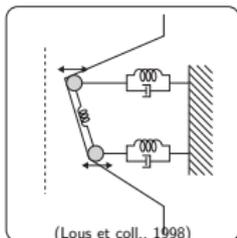
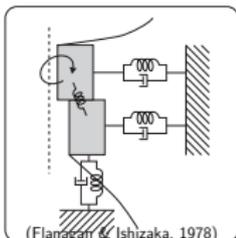
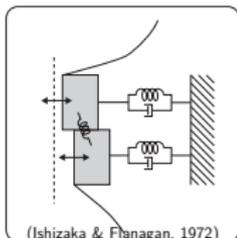
(Kaburagi, 2011)



Panoplie des modèles à une masse par pli (Birkholtz, 2011)



Modèles à deux masses ou plus...

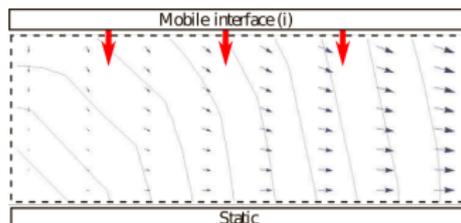
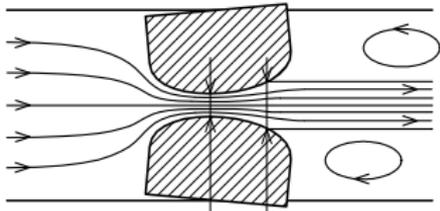


Limitations des modèles existants

La grande majorité des modèles de phonation reposent sur l'hypothèse que les particules fluides traversent si rapidement le canal glottique qu'elles ne « voient » pas le mouvement des parois (nombre de Strouhal faible).

Autrement dit, le **débit d'air pulsé par les plis** est négligeable devant le **débit dû à la pression transglottique**, et on peut considérer que la vitesse de l'écoulement est purement axiale.

Du point de vue du fluide, il n'y a alors aucun travail des forces de pression sur les plis, et donc aucune puissance échangée entre l'écoulement glottique et les plis.

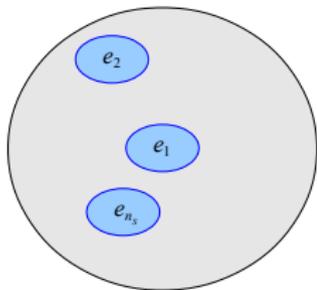


Et maintenant ?

Approche proposée pour la suite du cours :

- 1 **Modélisation : respecter**
 - la physique non linéaire
 - la structuration en composants actifs/passifs
 - l'équilibre des transferts d'énergie
- 2 **Simulation** : (idem) tests et recherche de comportements typiques
- 3 **Interpréter et identifier les limitations** en vue d'améliorer le modèle

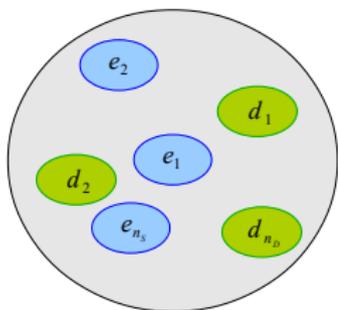
Un système physique est fait de ...



- Composants stockants de l'énergie : (énergie)

$$E = \sum_{n=1}^N e_n \geq 0$$

Un système physique est fait de ...



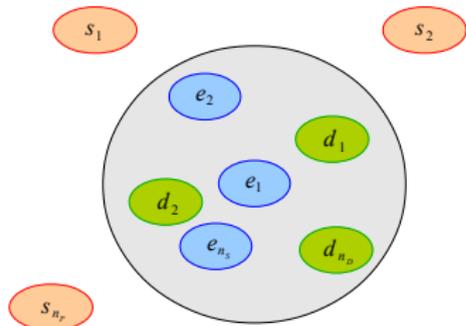
- Composants stockants de l'énergie : (énergie)

$$E = \sum_{n=1}^N e_n \geq 0$$

- Composants dissipatifs : (puissance dissipée)

$$Q = \sum_{m=1}^M d_m \geq 0$$

Un système physique est fait de ...



- Composants stockants de l'énergie : (énergie)

$$E = \sum_{n=1}^N e_n \geq 0$$

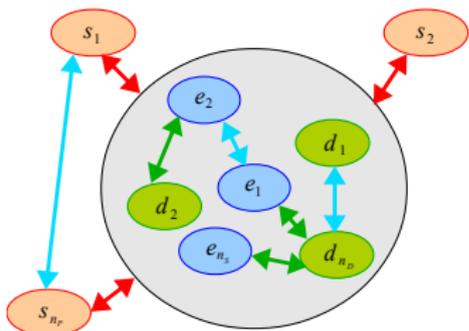
- Composants dissipatifs : (puissance dissipée)

$$Q = \sum_{m=1}^M d_m \geq 0$$

- Sources externes : (puissance externe)

$$P_{\text{ext}} = \sum_{p=1}^P s_p$$

Un système physique est fait de ...



- Composants stockants de l'énergie : (énergie)

$$E = \sum_{n=1}^N e_n \geq 0$$

- Composants dissipatifs : (puissance dissipée)

$$Q = \sum_{m=1}^M d_m \geq 0$$

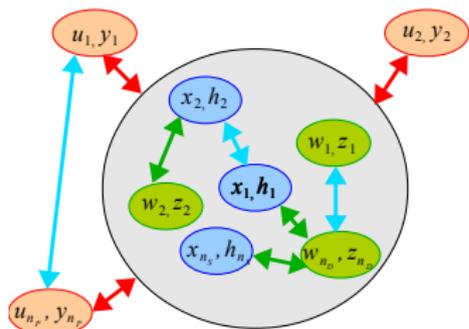
- Sources externes : (puissance externe)

$$P_{\text{ext}} = \sum_{p=1}^P s_p$$

- Connexions conservatives (bilan de puissance)

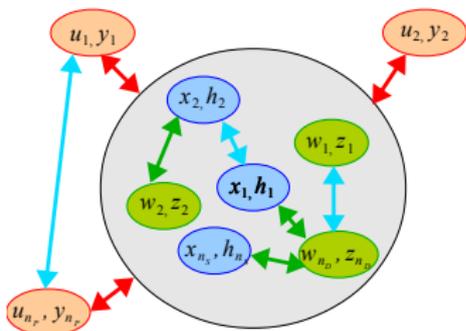
$$\frac{dE}{dt} = -Q + P_{\text{ext}}$$

Un système physique est fait de ...



- Composants stockants de l'énergie :** (énergie)
 $E = H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N H_n(x_n) \geq 0$
- Composants dissipatifs :** (puissance dissipée)
 $Q = \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \mathbf{w} = \sum_{m=1}^M z_m(w_m) w_m \geq 0$
 (effort \times flux : force \times vitesse, tension \times courant, etc)
- Sources externes :** (puissance externe)
 $P_{\text{ext}} = \mathbf{u}^T \mathbf{y} = \sum_{p=1}^P u_p y_p$
- Connexions conservatives** (bilan de puissance)
 $0 = \nabla H(\mathbf{x})^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \cdot \mathbf{w} - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{y}$

Un système physique est fait de ...



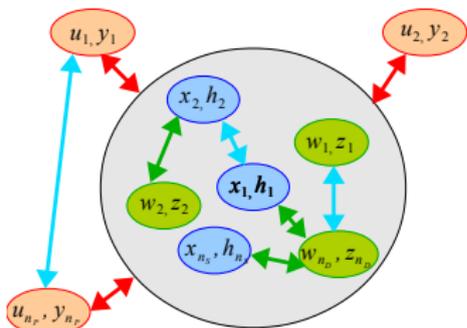
- Composants stockants de l'énergie : (énergie)
 $E = H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N H_n(x_n) \geq 0$
- Composants dissipatifs : (puissance dissipée)
 $Q = \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \mathbf{w} = \sum_{m=1}^M z_m(w_m) w_m \geq 0$
 (effort \times flux : force \times vitesse, tension \times courant, etc)
- Sources externes : (puissance externe)
 $P_{\text{ext}} = \mathbf{u}^T \mathbf{y} = \sum_{p=1}^P u_p y_p$
- Connexions conservatives (bilan de puissance)
 $0 = \nabla H(\mathbf{x})^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \cdot \mathbf{w} - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{y}$

Formulation Hamiltonienne à Ports

Bilan de puissance

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Un système physique est fait de ...



- Composants stockants de l'énergie : (énergie)

$$E = H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N H_n(x_n) \geq 0$$

- Composants dissipatifs : (puissance dissipée)

$$Q = \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \mathbf{w} = \sum_{m=1}^M z_m(w_m) w_m \geq 0$$

(effort \times flux : force \times vitesse, tension \times courant, etc)

- Sources externes : (puissance externe)

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{u}^T \mathbf{y} = \sum_{p=1}^P u_p y_p$$

- Connexions conservatives (bilan de puissance)

$$0 = \nabla H(\mathbf{x})^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \cdot \mathbf{w} - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{y}$$

Formulation Hamiltonienne à Ports

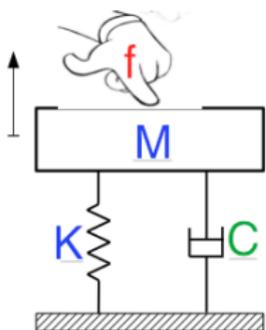
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}}_B = S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}}_A$$

Bilan de puissance

$$\begin{aligned} 0 &= A^T B \\ &= A^T S A \end{aligned}$$

$$\text{si } S = -S^T$$

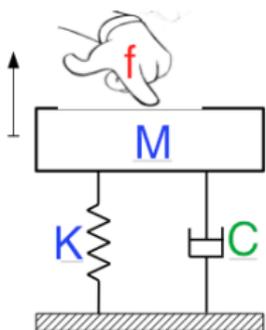
Exemple : oscillateur mécanique amorti



$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f$$

$x = \begin{bmatrix} M\dot{q} \\ q \end{bmatrix}$	$q^{\text{té}}$ mvt position	$H(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} x$	cinétique potentielle
$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M\ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$	<u>force d'inertie</u> vitesse	$\nabla H(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ Kq \end{bmatrix}$	vitesse <u>force de rappel</u>
$w = \dot{q}$	vitesse	$z(w) = C\dot{q}$	<u>force d'amortissement</u>
$y = \dot{q}$	vitesse	$u = f$	<u>force externe</u>

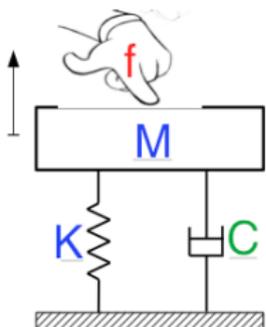
Exemple : oscillateur mécanique amorti



$x = \begin{bmatrix} M\dot{q} \\ q \end{bmatrix}$	$q^{\text{té mvt}}$ position	$H(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} x$	cinétique potentielle
$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M\ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$	force d'inertie vitesse	$\nabla H(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ Kq \end{bmatrix}$	vitesse force de rappel
$w = \dot{q}$	vitesse	$z(w) = C\dot{q}$	force d'amortissement
$y = \dot{q}$	vitesse	$u = f$	force externe

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ w \\ -y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S = -S^T} \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ z(w) \\ u \end{pmatrix}$$

Exemple : oscillateur mécanique amorti



$x = \begin{bmatrix} M\dot{q} \\ q \end{bmatrix}$	$q^{\text{té}}$ mvt position	$H(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} x$	cinétique potentielle
$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M\ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$	force d'inertie vitesse	$\nabla H(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ Kq \end{bmatrix}$	vitesse force de rappel
$w = \dot{q}$	vitesse	$z(w) = C\dot{q}$	force d'amortissement
$y = \dot{q}$	vitesse	$u = f$	force externe

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ w \\ -y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S=-S^T} \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ z(w) \\ u \end{pmatrix}$$

N oscillateurs couplés? q : vecteur

Matrices : $M = M^T > 0$, $K = K^T \geq 0$, $C = C^T \geq 0$, $1 \equiv I_N$

Quelques variations

Système Hamiltonien (autonome, non amorti)

$$\begin{pmatrix} F_M \\ v_K \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdot & \cdot \\ +1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_M \\ F_K \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

"Masse+Amortissement+Excitation"

$$\begin{pmatrix} F_M \\ \cdot \\ v_C \\ -v_{\text{ext}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & -1 & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_M \\ \cdot \\ F_C \\ F_{\text{ext}} \end{pmatrix}$$

"Masse+Excitation"

$$\begin{pmatrix} F_M \\ \cdot \\ \cdot \\ -v_{\text{ext}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_M \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{\text{ext}} \end{pmatrix}$$

Formulation différentielle

Formulation 1 : algèbro-différentielle

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad S = -S^T$$

Formulation 1 → 2 : résolution de la partie algébrique $w = W(\nabla H(x), u)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (J - R) \nabla H(x) + Gu, & J = -J^T, \quad R = R^T \geq 0 \\ -y = -G^T \nabla H(x) + Du, & D = -D^T \end{cases}$$

Cas du "Masse-amortisseur-ressort" : $H(x) = \frac{x_1^2}{2M} + \frac{Kx_2^2}{2}$, $z(w) = Cw$

$$S = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Simulation : schéma numérique
à passivité garantie

Schéma numérique à passivité garantie

Approche (illustrée sur la formulation 2)

- **Cas classique** $\frac{dx}{dt} = f(x)$: efforts sur l'approx. de $\frac{d}{dt}$ et l'exploitation de f
- **Cas SHP** : préserver le bilan de puissance en temps discret

$$\frac{dE}{dt} = \nabla H(x)^T \frac{dx}{dt} = \underbrace{\nabla H(x)^T J(x) \nabla H(x)}_{P_c=0} - \underbrace{\nabla H(x)^T R(x) \nabla H(x)}_{Q \geq 0} + \underbrace{y^T u}_{P_{ext}}$$

Comment ? (1) règle de dérivation en chaîne pour $E = H \circ x$; (2) exploiter J et R

(1) Choix : $\frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \sum_{n=1}^N \frac{H_n(x_n[k+1]) - H_n(x_n[k])}{x_n[k+1] - x_n[k]} \cdot \frac{x_n[k+1] - x_n[k]}{\delta T}$

(2) Substitutions : $\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{\delta x[k]}{\delta T} = \frac{x[k+1] - x[k]}{\delta T}$ et $\nabla H(x) \rightarrow \nabla_d H(x[k], \delta x[k])$ avec

$$[\nabla_d H(x, \delta x)]_n = \frac{H_n(x_n + \delta x_n) - H_n(x_n)}{\delta x_n} \text{ si } \delta x_n \neq 0 \text{ et } H'_n(x_n) \text{ sinon}$$

Cette méthode répartit les efforts sur deux approximations :

1. celle des applications différentielles ; 2. celle du champ de vecteur $f = (J - R)\nabla H \rightarrow f_d = (J - R)\nabla_d H$.

Schéma numérique

Formulation 1 : $x[k+1] = x[k] + \delta x[k]$ avec à résoudre

$$\begin{cases} \frac{\delta x[k]}{\delta t} = (J - R) \nabla_d H(x[k], \delta x[k]) + Gu[k] \\ y[k] = G^T \nabla_d H(x[k], \delta x[k]) \end{cases}$$

Cas des systèmes linéaires

$$H(x) = \frac{1}{2} x^T W x \text{ avec } W = W^T > 0$$

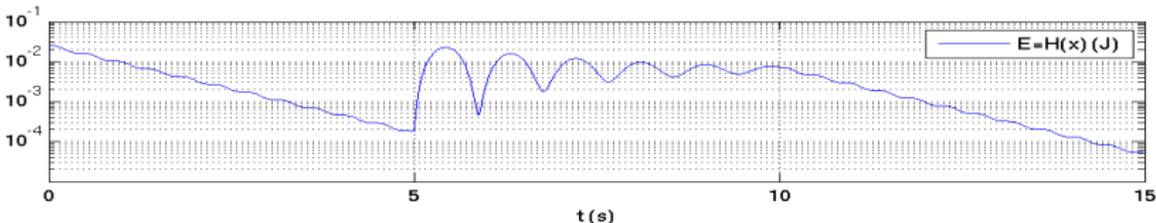
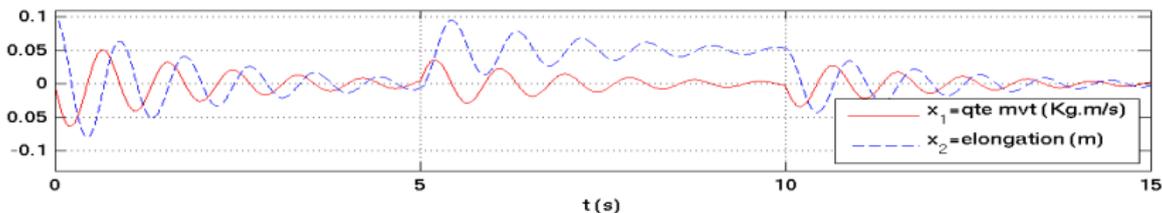
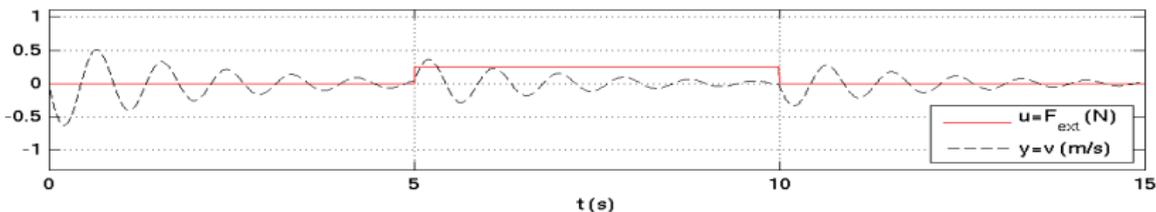
Point milieu : $\nabla_d H(x[k], \delta x[k]) = W \left(x[k] + \frac{\delta x[k]}{2} \right) = \nabla H \left(\frac{x[k] + x[k+1]}{2} \right)$

On peut montrer que : [Aoues, Thèse, 2014] & [Lopes et al., IFAC-LHMNLC'2015]

- (A) Gradient discret : encore définissable pour les H non mono-variants,
- (L) Consistance : ordre 1 en général et 2 pour J et R indépendants de (x, w) ,
- (L) Ordre 2 atteignable (raffinement de type Runge-Kutta),
- (L) Solution explicitable par chgt. de var., si H est convexe.

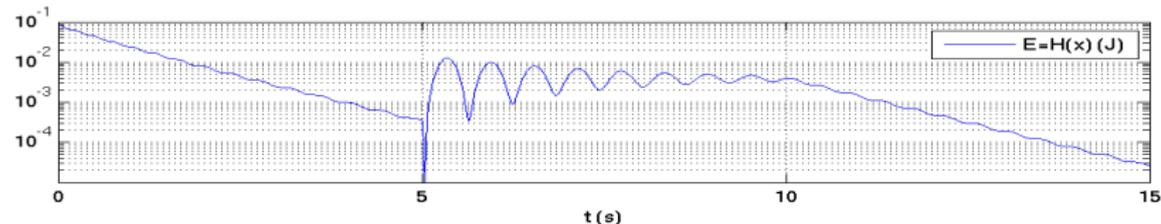
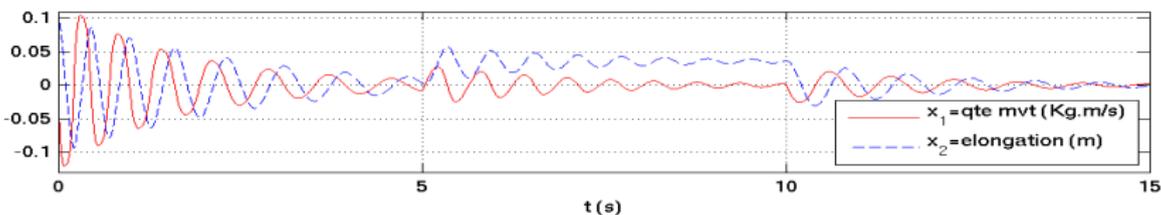
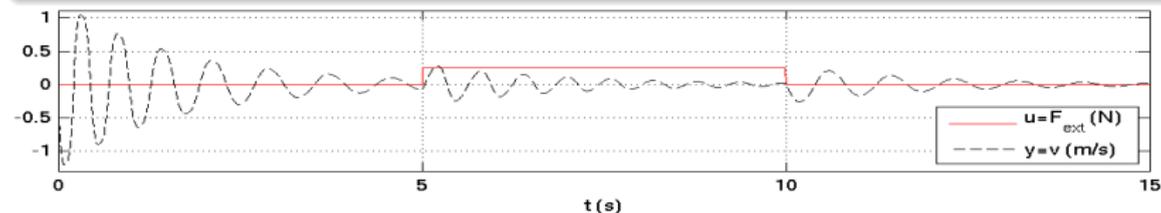
Simulation 1 : masse-amortisseur-ressort

- **Paramètres** : $M=100$ g, $K=3$ kN/m, $C=0.1$ N.s/m et $\delta t=5$ ms
- **Conditions Initiales** : $x_0 = [mv_0=0, l_0=10$ cm] T
- **Excitation** : $F_{\text{ext}}(t) = F_{\text{max}} \mathbf{1}_{[5s,10s]}(t)$ avec $F_{\text{max}}=Kl_0/2=0.25$ N



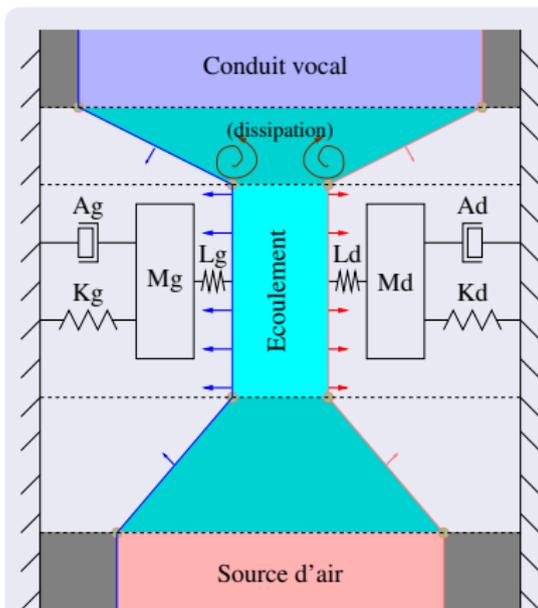
Simulation 2 : idem pour un ressort raidissant

- **Energie potentielle** : $H_2^{NL}(x_2) = K L^2 [\cosh(x_2/L) - 1]$ ($\sim k x_2^2/2$)
- **Loi constitutive** : $F_2 = (H_2^{NL})'(x_2) = K L \sinh(x_2/L)$ ($\sim K x_2$)
- **Elongation critique** : $L = \ell_0/4 = 25$ mm



Modélisation de l'appareil vocal
(modèle minimal énergétiquement bien posé)

Description d'un modèle minimal



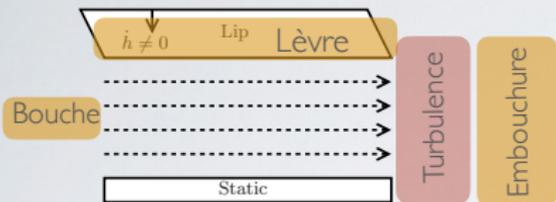
- **Résonateur acoustique** : 1 formant
- **Turbulences** : dissipation de l'énergie cinétique du jet ($v > 0$)
- **Plis vocaux (x2)** :
masse-amortisseur-ressort
+ ressort connecté au canal
- **Ecoulement** : gaz parfait sans pertes, incompressible et irrotationnel, dans un canal droit à parois mobiles
- **Amont/aval** : application des forces de pression sur les cones
- **Source** : générateur de pression

Le coeur du modèle non linéaire : l'écoulement (1/4)

Modèle simple énergiquement bien posé : quel est le problème ?

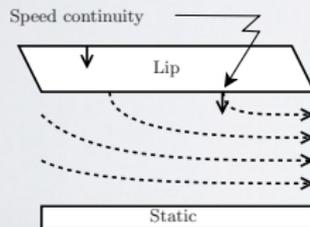
Pour commencer, cas à 1 pli mobile (thèse Lopes) : une paroi mobile, autre paroi immobile

Modèle classique: Équations de Bernoulli



Pas de transfert de puissance jet/paroi
(écoulement sans vitesse transverse)

Modèle 2D: Équations de Bernoulli



Transfert de puissance jet/paroi
(vitesse x force $\neq 0$)

Le coeur du modèle non linéaire : l'écoulement (2/4)

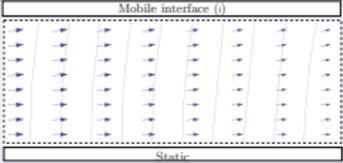
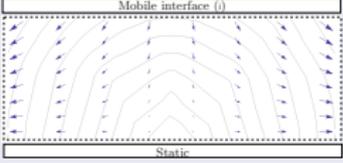
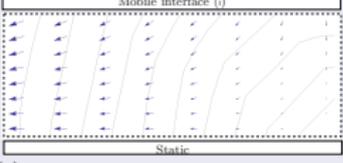
Modèle "1 pli" énergiquement bien posé : "quelle physique" résoudre ?

Description	Equations & champs solutions
<p>(a)</p> <p>(b)</p>	<p>Équations d'Euler</p> $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ $\dot{\mathbf{v}} + \nabla \left(\frac{ \mathbf{v} ^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla(p) = 0$ <p>Champ des vitesses</p> $\begin{cases} u(x, y, t) = u_0(t) - \frac{\dot{h}}{h} x \\ v(x, y, t) = \frac{\dot{h}}{h} y \end{cases}$ <p>Champ de pression</p> $p(x, y, t) = p_0(t) + \rho \left[\frac{1}{2} (x^2 - y^2) \frac{\ddot{h}}{h} - x^2 \frac{\dot{h}^2}{h^2} - (\dot{u}_0 - \frac{\dot{h}}{h} u_0) x \right]$

→ On sait calculer l' **énergie** (cinétique) : $\int_{\text{Volume}(t)} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}(x, y)^2 d\text{Vol}(x, y)$

Le coeur du modèle non linéaire : l'écoulement (3/4)

Modèle "1 pli" énergiquement bien posé : "quelle physique" résoudre ?

Résultat	Equations & champs solutions
 <p>(a)</p>	<p>Équations d'Euler</p> $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ $\dot{\mathbf{v}} + \nabla \left(\frac{ \mathbf{v} ^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla(p) = 0$
 <p>(b)</p>	<p>Champ des vitesses</p> $\begin{cases} u(x, y, t) = u_0(t) - \frac{\dot{h}}{h} x \\ v(x, y, t) = \frac{\dot{h}}{h} y \end{cases}$
 <p>(c)</p>	<p>Champ de pression</p> $p(x, y, t) = p_0(t) + \rho \left[\frac{1}{2} (x^2 - y^2) \frac{\ddot{h}}{h} - x^2 \frac{\dot{h}^2}{h^2} - (\dot{u}_0 - \frac{\dot{h}}{h} u_0) x \right]$

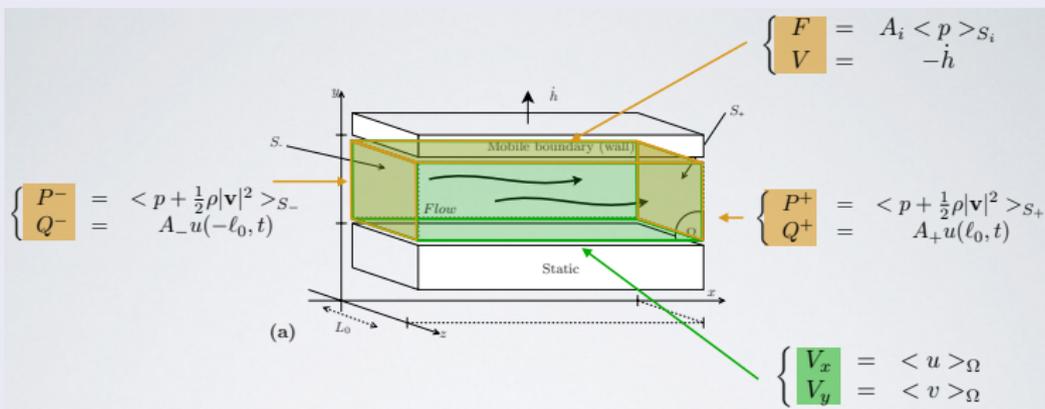
→ On sait calculer l' **énergie** (cinétique) : $\int_{\text{Volume}(t)} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}(x, y)^2 d\text{Vol}(x, y)$

Le coeur du modèle non linéaire : l'écoulement (4/4)

Modèle "à 1 pli" énergiquement bien posé : bilan macroscopique

En moyennant sur le volume et les frontières, on trouve (Lopes, 2016) :

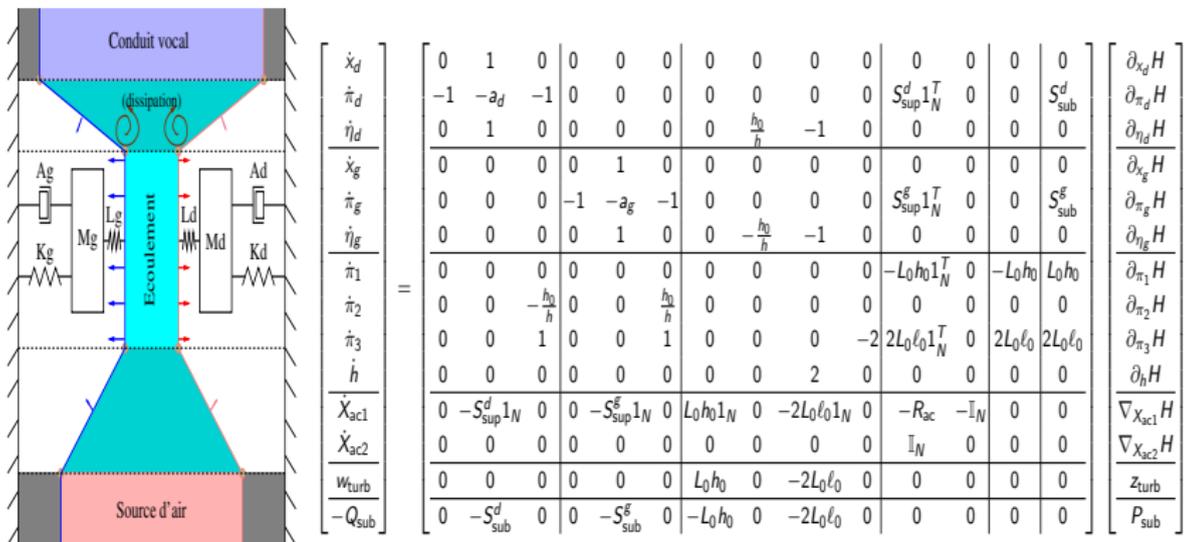
- une **énergie exacte**, fonction $\langle V_x \rangle$ (vitesse moyenne), h (hauteur du canal), \dot{h} (vitesse de la paroi)
- un **bilan énergétique** sur les quantités moyennes : force et vitesse (paroi), débits et pressions dynamiques à gauche/droite (*Bernoulli* : $P^+ = P^-$!)



Modèle "à 2 plis" énergiquement bien posé (EESV2016 : Hélié, Silva)

Idem avec $\langle V_x \rangle$, h et les vitesses gauche/droite des plis.

Le système complet



Où se cachent les non-linéarités ?

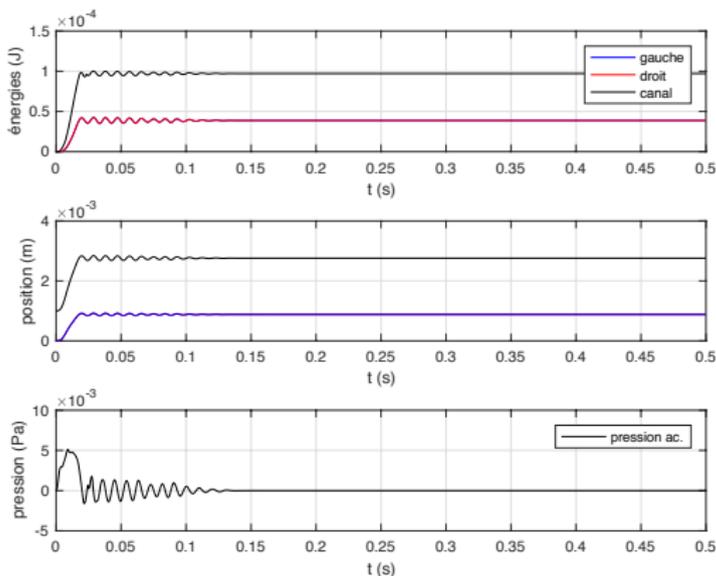
1. dans l'énergie de l'écoulement (\rightarrow auto-oscillation) ;
2. dans les pertes par turbulences (z)

Simulations, tests et interprétations

Paramètres

- Plis : masse $0.2g$, amortissement $r = 0.05$, raideur de couche superficielle $L = 3K$
- Canal glottique de largeur $L_0 = 11mm$, longueur $4mm$ hauteur au repos $0.1mm$
- Surfaces exposées aux pressions supraglottique $1.1mm^2$ et subglottique $1.1cm^2$
- Formant /a/ russe (Badin, 1984) :
640Hz, facteur de qualité 2.5, amplitude $1M\Omega$
- Pression subglottique $800Pa$ avec une montée de $20ms$

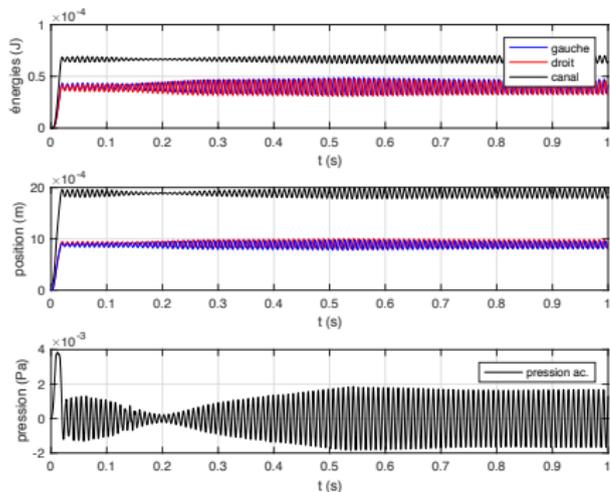
Configuration 1 : Faible adduction



Hauteur au repos 1mm
Plis symétriques
raideur 100N/m
Fréquence de résonances
 112Hz

Pas d'oscillation

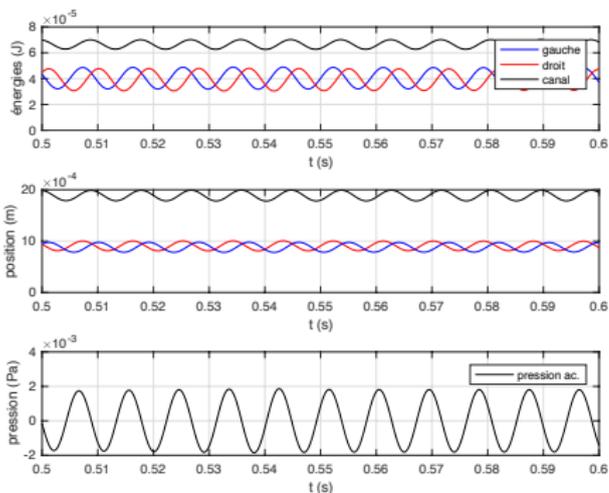
Configuration 2 : Meilleure adduction



Hauteur au repos 0.1mm
Plis quasi symétriques
raideurs 100N/m et 97N/m
Fréquence de résonances
 112Hz et 110Hz

Oscillation stabilisée après un
transitoire de l'ordre de
 0.4ms

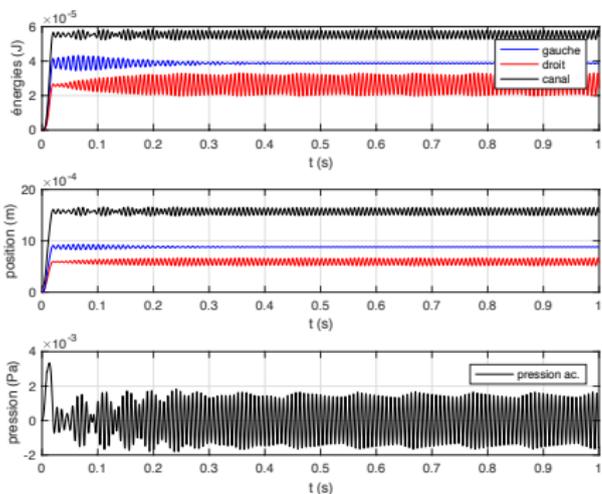
Configuration 2 : Meilleure adduction



Hauteur au repos 0.1mm
Plis quasi symétriques
raideurs 100N/m et 97N/m
Fréquence de résonances
 112Hz et 110Hz

Les plis sont bien
synchronisés en régime
permanent (sans contact).

Configuration 3 : forte asymétrie



Hauteur au repos 0.1mm
 Plis asymétriques
 raideurs 100N/m et 149N/m
 Fréquence de résonances
 112Hz et 137Hz
 Une oscillation s'établit avec modulation, portée au début par le pli le plus mou durant le transitoire, puis par le pli le plus raide (et médialisé).

CONCLUSION :
contributions et perspectives

Contributions et limitations

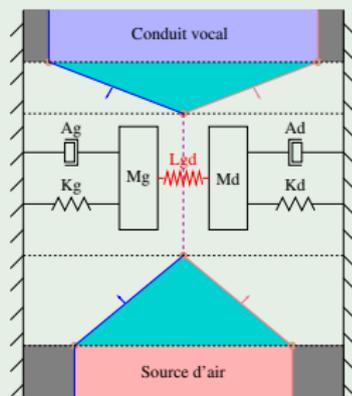
Contributions

- Revue de la littérature des modèles simplifiés de plis vocaux depuis 1960 sous l'angle des conditions d'auto-oscillations
- Mise en évidence d'une limitation fondamentale de ces modèles
- Approche et outil de **description modulaire** qui :
 - respectent les principes physiques (échanges d'énergie, passivité)
 - respectent ces principes jusque dans la simulation
 - donnent un cadre pour inclure progressivement des modèles plus fins pour tous les composants mis en jeu dans la production vocale.

Quelques perspectives

Améliorations

- Canal/écoulement : géométrie 3D réaliste, viscosité dans les canaux étroits
- Mécanique des plis : lois non linéaires, multi-échelles(/multi-couches),
- Prise en compte des collisions



Utilisations

- Étalonnage du modèle à partir de données physiologiques et expérimentales
- Etude/prédiction des seuils de phonation
- Catégorisation des régimes d'oscillation (/mécanismes)
- Contrôle de synthèses sonores et de maquettes robotisées

Merci de votre attention

