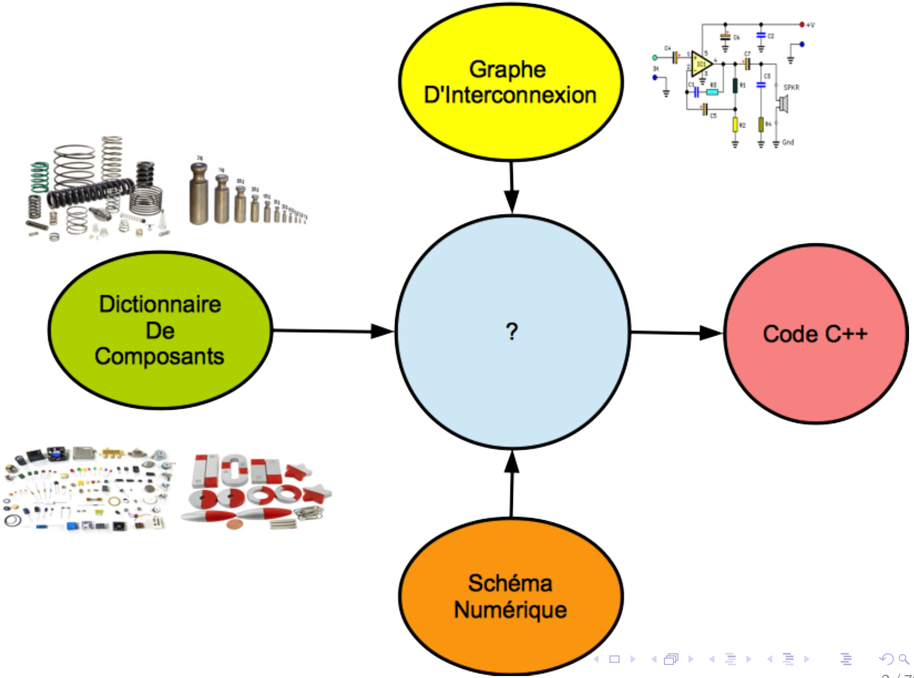
Structure passive pour la modélisation, la simulation et le contrôle de systèmes multi-physiques audios

Antoine Falaize et **Thomas Hélie**

Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique
CNRS - UMR STMS 9912
1 place Igor Stravinsky, F-75004 Paris

Projet ANR HaMecMoPSys

Séminaire invité
Laboratoire des Sciences de L'ingénieur pour l'Environnement
10/12/2015 - La Rochelle


Graphe D'Interconnexion
Dictionnaire De Composants
?
Code C++
Schéma Numérique

Objectif

1. Modèles physiques passifs
   - Respectent un principe physique: le bilan de puissance.
   - Stabilité garantie.

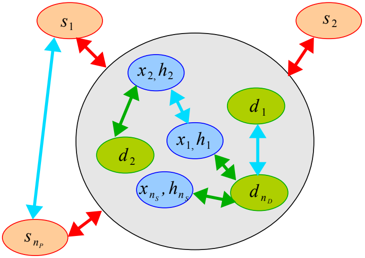
2. Structure stable par interconnexion
   - Système global passif pour un dictionnaire de composants passifs.
   - Systématisation des processus de modélisation et simulation.

3. Méthode numérique préservant la passivité
   - Aucune énergie n'est créée dans le système au cours des simulations.
   - Simulations stables (la puissance fournie est finie).

Un formalisme dédié: Les Système Hamiltoniens à Ports (SHP)

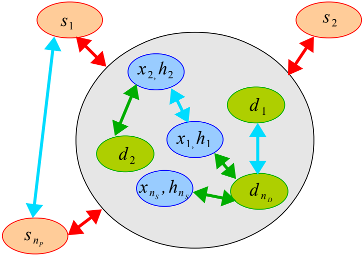
Plan

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



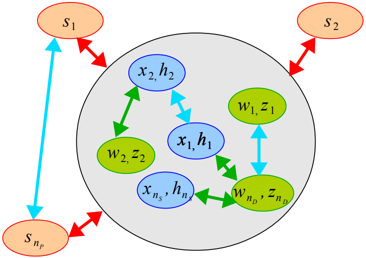
- Énergie stockée (cas monovariant)
  $E = \mathtt{H}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{n_S} h_n(x_n) \geq 0$
  (h_n def. positive et convexe)
- Variation d'énergie: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\frac{dE}{dt} = \nabla \mathtt{H}^\intercal \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^{n_S} \frac{dh_n}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$
- Puissance dissipée: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\mathcal{D} = \mathbf{z}(\mathbf{w})^\intercal \cdot \mathbf{w} = \sum_{n=1}^{n_D} z_n(w_n) \cdot w_n \geq 0$
- Puissance externe: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\mathcal{P} = \mathbf{u}^\intercal \cdot \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{n_P} u_n \cdot y_n$

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



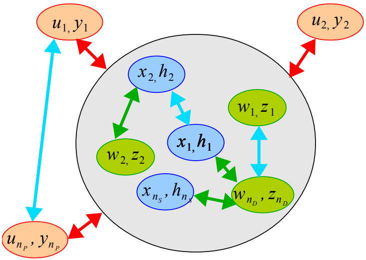
- Énergie stockée (cas monovariant)
  $E = \mathtt{H}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{n_S} h_n(x_n) \geq 0$
- Variation d'énergie: ⟨effort,flux⟩
  $\frac{dE}{dt} = \nabla\mathtt{H}^\intercal \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^{n_S} \frac{dh_n}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$
- Puissance dissipée: ⟨effort,flux⟩
  $\mathcal{D} = \mathbf{z}(\mathbf{w})^\intercal \cdot \mathbf{w} = \sum_{n=1}^{n_D} z_n(w_n) \cdot w_n \geq 0$
- Puissance externe: ⟨effort,flux⟩
  $\mathcal{P} = \mathbf{u}^\intercal \cdot \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{n_P} u_n \cdot y_n$

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



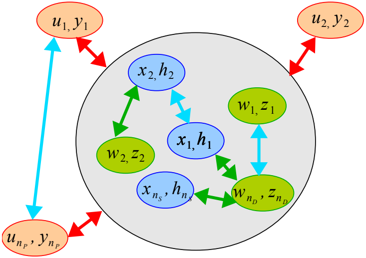
- Énergie stockée (cas monovariant)
  $E = \mathtt{H}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{n_S} h_n(x_n) \geq 0$
- Variation d'énergie: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\frac{dE}{dt} = \nabla \mathtt{H}^\intercal \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^{n_S} \frac{dh_n}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$
- Puissance dissipée: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\mathcal{D} = \mathbf{z}(\mathbf{w})^\intercal \cdot \mathbf{w} = \sum_{n=1}^{n_D} z_n(w_n) \cdot w_n \geq 0$
  $\left(\frac{dz_n}{dw_n} > 0 \text{ et } z_n(0) = 0\right)$
- Puissance externe: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\mathcal{P} = \mathbf{u}^\intercal \cdot \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{n_P} u_n \cdot y_n$

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



- Énergie stockée (cas monovariant)
  $E = \mathtt{H}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{n_S} h_n(x_n) \geq 0$
- Variation d'énergie: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\frac{dE}{dt} = \nabla \mathtt{H}^\intercal \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^{n_S} \frac{dh_n}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$
- Puissance dissipée: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\mathcal{D} = \mathbf{z}(\mathbf{w})^\intercal \cdot \mathbf{w} = \sum_{n=1}^{n_D} z_n(w_n) \cdot w_n \geq 0$
- Puissance externe: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\mathcal{P} = \mathbf{u}^\intercal \cdot \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{n_P} u_n \cdot y_n$

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.

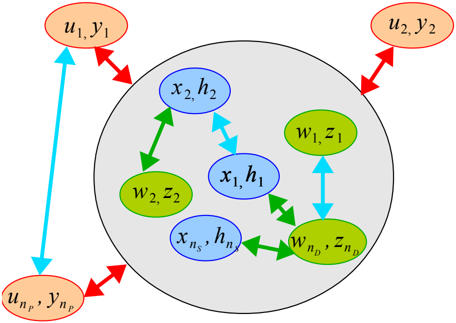


Le bilan de puissance
$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{D} + \mathcal{P}$$
se réécrit
$$\nabla \mathrm{H}^\intercal \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{z}(\mathbf{w})^\intercal \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u}^\intercal \cdot \mathbf{y}$$

Structure des systèmes Hamiltoniens à Ports:

$$\boxed{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \hline \mathbf{K}^\mathsf{T} & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_w \\ \hline -\mathbf{G}_x^\mathsf{T} & -\mathbf{G}_w^\mathsf{T} & \mathbf{J}_y \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \mathrm{H}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{J}} \cdot \boxed{\mathbf{a}},$$

avec $\mathbf{J}_x$, $\mathbf{J}_w$, $\mathbf{J}_y$ et donc $\boxed{\mathbf{J}}$ des matrices anti-symétriques: $\boxed{\mathbf{J}^\mathsf{T} = -\mathbf{J}}$



Structure des systèmes Hamiltoniens à Ports:

$$\boxed{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \hline \mathbf{K}^\intercal & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_w \\ \hline -\mathbf{G}_x^\intercal & -\mathbf{G}_w^\intercal & \mathbf{J}_y \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \mathtt{H}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{J}} \cdot \boxed{\mathbf{a}},$$

avec $\mathbf{J}_x$, $\mathbf{J}_w$, $\mathbf{J}_y$ et donc $\boxed{\mathbf{J}}$ des matrices anti-symétriques: $\boxed{\mathbf{J}^\intercal = -\mathbf{J}}$

Encode le bilan de puissance:

$$\begin{aligned} \underbrace{\nabla \mathtt{H}^\intercal \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}}_{\frac{dE}{dt}} + \underbrace{\mathbf{z}(\mathbf{w})^\intercal \cdot \mathbf{w}}_{\mathcal{D} \geq 0} - \underbrace{\mathbf{u}^\intercal \cdot \mathbf{y}}_{\mathcal{P}} &= \boxed{\mathbf{a}^\intercal} \cdot \boxed{\mathbf{b}} \\ &= \boxed{\mathbf{a}^\intercal} \cdot \boxed{\mathbf{J}} \cdot \boxed{\mathbf{a}} = 0 \end{aligned}$$

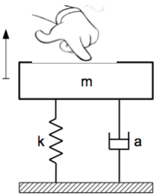
Système passif d'état $\mathbf{x}$

Énergie $\mathtt{H} \equiv$ Fonctionnelle de Lyapunov (stabilité/contrôle)

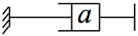
Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Structure des systèmes Hamiltoniens à Ports:

$$\boxed{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \hline \mathbf{K}^\mathsf{T} & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_w \\ \hline -\mathbf{G}_x^\mathsf{T} & -\mathbf{G}_w^\mathsf{T} & \mathbf{J}_y \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \mathrm{H}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{J}} \cdot \boxed{\mathbf{a}}$$



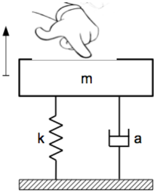
Les composants (convention récepteur)

Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	↑↓
$\boxed{m}$	x_1 = qté de mvt	$h_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{dh_1}{dx_1}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$	↑
	x_2 = élongation	$h_2(x_2) = \frac{k}{2} x_2^2$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$F_2 = \frac{dh_2}{dx_2}$	↑
	w_3 = vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w_3$	$F_3 = z_3(w_3)$	↑
Excitation	$\oslash$	$\oslash$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$	↓

Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Que vaut $\boxed{\mathbf{a}}$?

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \hline \mathbf{K}^\mathsf{T} & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_w \\ \hline -\mathbf{G}_x^\mathsf{T} & -\mathbf{G}_w^\mathsf{T} & \mathbf{J}_y \end{array}\right) \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \nabla \mathrm{H}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix}}$$

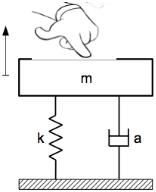


Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	↑↓
$\boxed{m}$	x_1 = qtté de mvt	$h_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$\boxed{v_1 = \frac{dh_1}{dx_1}}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$	↑
k	x_2 = élongation	$h_2(x_2) = \frac{k}{2}x_2^2$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$\boxed{F_2 = \frac{dh_2}{dx_2}}$	↑
a	w_3 = vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w$	$\boxed{F_3 = z_3(w_3)}$	↑
Excitation	$\varnothing$	$\varnothing$	$v_4 = -y_4$	$\boxed{F_4 = u_4}$	↓

Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Que vaut $\boxed{\mathbf{b}}$?

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \hline \mathbf{K}^\mathsf{T} & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_w \\ \hline -\mathbf{G}_x^\mathsf{T} & -\mathbf{G}_w^\mathsf{T} & \mathbf{J}_y \end{array}\right) \cdot \boxed{\begin{pmatrix} v_1 \\ F_2 \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \end{pmatrix}}$$



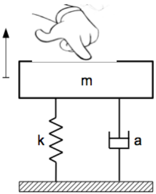
Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	↑↓
m	x_1 = qtté de mvt	$h_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{dh_1}{dx_1}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$	↑
k	x_2 = élongation	$h_2(x_2) = \frac{k}{2}x_2^2$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$F_2 = \frac{dh_2}{dx_2}$	↑
a	w_3 = vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w_3$	$F_3 = z_3(w_3)$	↑
Excitation	⊘	⊘	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$	↓

Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Que vaut $\boxed{\mathbf{J}}$?

1. RFD

$$\boxed{\begin{pmatrix} F_1 \\ v_2 \\ \hline v_3 \\ \hline -v_4 \end{pmatrix}} = \boxed{\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & -1 & -1 & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} v_1 \\ F_2 \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \end{pmatrix}}$$



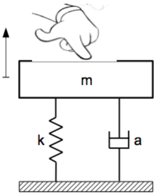
Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	$\uparrow\downarrow$
m	$x_1 =$ qtté de mvt	$h_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{dh_1}{dx_1}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$	$\uparrow$
k	$x_2 =$ élongation	$h_2(x_2) = \frac{k}{2}x_2^2$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$F_2 = \frac{dh_2}{dx_2}$	$\uparrow$
a	$w_3 =$ vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w_3$	$F_3 = z_3(w_3)$	$\uparrow$
Excitation	$\oslash$	$\oslash$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$	$\downarrow$

Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Que vaut $\boxed{\mathbf{J}}$?

1. RFD
2. $v \equiv$ vitesse de la masse

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_2 \\ \hline v_3 \\ \hline -v_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline +1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ F_2 \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \end{pmatrix}$$



Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	↑↓
$\boxed{m}$	$x_1 =$ qtté de mvt	$h_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{dh_1}{dx_1}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$	↑
k	$x_2 =$ élongation	$h_2(x_2) = \frac{k}{2} x_2^2$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$F_2 = \frac{dh_2}{dx_2}$	↑
a	$w_3 =$ vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w_3$	$F_3 = z_3(w_3)$	↑
Excitation	$\oslash$	$\oslash$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$	↓

Réduction de la structure dissipative linéaire

Partition de $\mathbf{z}$ avec $\mathbf{z_L}$ une matrice diagonale et $\mathbf{z_N}$ la collection de fonctions non-linéaires.

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_L} \\ \mathbf{w_N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \mathbf{z_L} \cdot \mathbf{w_L} \\ \mathbf{z_N}(\mathbf{w_N}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K_L} \\ \mathbf{K_N} \end{pmatrix}, \ \mathbf{G_w} = \begin{pmatrix} \mathbf{G_L} \\ \mathbf{G_N} \end{pmatrix}, \ \mathbf{J_w} = \begin{pmatrix} \mathbf{J_{LL}} & -\mathbf{K_{LN}} \\ \mathbf{K_{LN}}^\intercal & \mathbf{J_{NN}} \end{pmatrix}.$$

Nouvelle structure

$\mathbf{L} = (\mathbf{K_L}^\intercal, -\mathbf{K_{LN}}, -\mathbf{G_L})$ et $\mathbf{M} = \left(\mathbf{z_L}^{-1} - \mathbf{J_{LL}}\right)^{-1}$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J_x} & -\mathbf{K_N} & -\mathbf{G_x} \\ \hline \mathbf{K_N}^\intercal & \mathbf{J_{NN}} & -\mathbf{G_N} \\ \hline \mathbf{G_x}^\intercal & \mathbf{G_N}^\intercal & \mathbf{J_y} \end{array}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{L}^\intercal \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}^\intercal) \cdot \mathbf{L}$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\mathbf{L}^\intercal \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^\intercal) \cdot \mathbf{L}.$$

Réduction de la structure dissipative linéaire

Système Hamiltonien à ports réduit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{w_N} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_N} = \left(\tilde{\mathbf{J}} - \mathbf{R}\right) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla \mathrm{H}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z_N}(\mathbf{w_N}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}_N} \tag{1}$$

Interprétation

- $\tilde{\mathbf{J}} \rightarrow$ interconnexion conservative,
- $\mathbf{R} \rightarrow$ interconnexion résistive.

Méthode numérique préservant la passivité

Méthode numérique préservant la passivité

Objectif: Garantir un bilan de puissance à temps discret

$$\frac{\delta E}{\delta T}[k] = \mathcal{P}[k] - \mathcal{D}[k]$$

Choix: $\frac{\delta E[k]}{\delta T} = \frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \frac{\mathrm{H}(\mathbf{x}[k+1])-\mathrm{H}(\mathbf{x}[k])}{\delta T}$

Cas Monovariant: $\frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \sum_s \frac{h_s(x_s[k+1])-h_s(x_s[k])}{x_s[k+1]-x_s[k]} \cdot \frac{x_s[k+1]-x_s[k]}{\delta T}$

Solution:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{d\mathbf{x}}{dt} & \longrightarrow & \frac{\delta \mathbf{x}[k]}{\delta T} = \frac{\mathbf{x}[k+1]-\mathbf{x}[k]}{\delta T} & & \\ \nabla \mathrm{H}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \nabla^d \mathrm{H}\big(\mathbf{x}[k], \delta \mathbf{x}[k]\big) & \triangleq & \text{gradient discret} \end{array}$$

avec

$$\left[\nabla^d \mathrm{H}(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x})\right]_s = \frac{h_s\big([\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}]_s\big) - h_s\big([\mathbf{x}]_s\big)}{[\delta \mathbf{x}]_s} \underset{[\delta\mathbf{x}]_s \to 0}{\longrightarrow} \frac{dh_s}{dx_s}(x_s).$$

Méthode numérique préservant la passivité

Objectif: Garantir un bilan de puissance à temps discret

$$\frac{\delta E}{\delta T}[k] = \mathcal{P}[k] - \mathcal{D}[k]$$

Choix: $\frac{\delta E[k]}{\delta T} = \frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \frac{\mathrm{H}(\mathbf{x}[k+1])-\mathrm{H}(\mathbf{x}[k])}{\delta T}$

Cas Monovariant: $\frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \sum_s \frac{h_s(x_s[k+1])-h_s(x_s[k])}{x_s[k+1]-x_s[k]} \cdot \frac{x_s[k+1]-x_s[k]}{\delta T}$

Solution:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{d\mathbf{x}}{dt} & \longrightarrow & \frac{\delta \mathbf{x}[k]}{\delta T} = \frac{\mathbf{x}[k+1]-\mathbf{x}[k]}{\delta T} & & \\ \nabla \mathrm{H}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \nabla^d \mathrm{H}(\mathbf{x}[k], \delta \mathbf{x}[k]) & \triangleq & \text{gradient discret} \end{array}$$

avec

$$\left[\nabla^d \mathrm{H}(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})\right]_s = \frac{h_s([\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}]_s) - h_s([\mathbf{x}]_s)}{[\delta\mathbf{x}]_s} \xrightarrow[{[\delta\mathbf{x}]_s \to 0}]{} \frac{dh_s}{dx_s}(x_s).$$

Méthode numérique préservant la passivité

Objectif: Garantir un bilan de puissance à temps discret

$$\frac{\delta E}{\delta T}[k] = \mathcal{P}[k] - \mathcal{D}[k]$$

Choix: $\frac{\delta E[k]}{\delta T} = \frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \frac{\mathtt{H}(\mathbf{x}[k+1])-\mathtt{H}(\mathbf{x}[k])}{\delta T}$

Cas Monovariant: $\frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \sum_s \frac{h_s(x_s[k+1])-h_s(x_s[k])}{x_s[k+1]-x_s[k]} \cdot \frac{x_s[k+1]-x_s[k]}{\delta T}$

Solution:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{d\mathbf{x}}{dt} & \longrightarrow & \frac{\delta \mathbf{x}[k]}{\delta T} = \frac{\mathbf{x}[k+1]-\mathbf{x}[k]}{\delta T} & & \\ \nabla \mathtt{H}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \nabla^d \mathtt{H}\big(\mathbf{x}[k], \delta \mathbf{x}[k]\big) & \triangleq & \text{gradient discret} \end{array}$$

avec

$$\left[\nabla^d \mathtt{H}(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x})\right]_s = \frac{h_s\big([\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}]_s\big) - h_s\big([\mathbf{x}]_s\big)}{[\delta \mathbf{x}]_s} \underset{[\delta\mathbf{x}]_s \to 0}{\longrightarrow} \frac{dh_s}{dx_s}(x_s).$$

Méthode numérique préservant la passivité

Solution

$$\begin{array}{ccccc} \frac{d\mathbf{x}}{dt} & \longrightarrow & \frac{\delta\mathbf{x}[k]}{\delta T} = \frac{\mathbf{x}[k+1]-\mathbf{x}[k]}{\delta T} & & \\ \nabla\mathrm{H}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \nabla^d\mathrm{H}\big(\mathbf{x}[k],\delta\mathbf{x}[k]\big) & \triangleq & \text{gradient discret} \end{array}$$

SHP discret

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta\mathbf{x}[k]}{\delta T} \\ \hline \mathbf{w}[k] \\ \hline -\mathbf{y}[k] \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \hline \mathbf{K}^\intercal & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_w \\ \hline -\mathbf{G}_x^\intercal & -\mathbf{G}_w^\intercal & \mathbf{D} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \nabla^d\mathrm{H}\big(\mathbf{x}[k],\delta\mathbf{x}[\mathbf{k}]\big) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}[k]) \\ \hline \mathbf{u}[k] \end{pmatrix}.$$

Cette méthode préserve la structure du SHP original,
donc la passivité à temps discret.

Comparaison de quelques méthodes numériques

Système conservatif: $\partial_t \mathbf{x}(t) = \mathbf{J}\nabla \mathtt{H}(\mathbf{x}(t))$

Méthodes numériques

Euler implicite: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{J}\nabla \mathtt{H}(\mathbf{x}_{k+1})$

Méthode du trapèze: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{J}\frac{\nabla \mathtt{H}(\mathbf{x}_k)+\nabla \mathtt{H}(\mathbf{x}_{k+1})}{2}$

Point milieu: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{J}\nabla \mathtt{H}\left(\frac{\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_{k+1}}{2}\right)$

Gradient discret: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{J}\frac{\mathtt{H}(\mathbf{x}_{k+1})-\mathtt{H}(\mathbf{x}_k)}{\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}_k}$

Pour les systèmes linéaires $\nabla \mathtt{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x}$

Méthode du trapèze $\equiv$ Point milieu $\equiv$ Gradient discret:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{T}{2}\mathbf{J}\mathbf{Q}(\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k)$$

Comparaison de quelques méthodes numériques

Système conservatif: $\partial_t \mathbf{x}(t) = \mathbf{J}\nabla\mathtt{H}(\mathbf{x}(t))$

Méthodes numériques

Euler implicite: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{J}\nabla\mathtt{H}(\mathbf{x}_{k+1})$

Méthode du trapèze: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{J}\frac{\nabla\mathtt{H}(\mathbf{x}_k)+\nabla\mathtt{H}(\mathbf{x}_{k+1})}{2}$

Point milieu: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{J}\nabla\mathtt{H}\left(\frac{\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_{k+1}}{2}\right)$

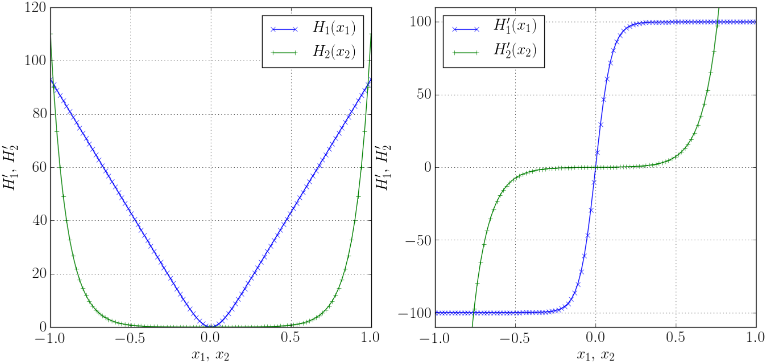
Gradient discret: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{J}\frac{\mathtt{H}(\mathbf{x}_{k+1})-\mathtt{H}(\mathbf{x}_k)}{\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}_k}$

Pour les systèmes non-linéaires

Méthode du trapèze $\neq$ Point milieu $\neq$ Gradient discret

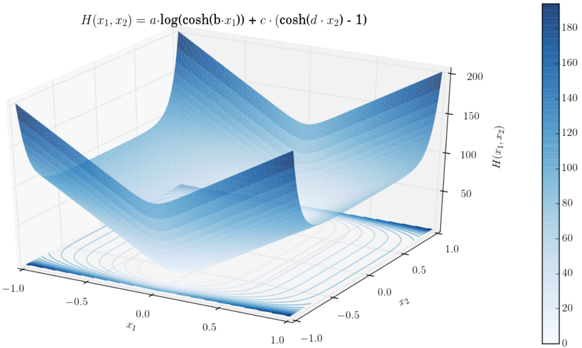
Expérience numérique

$H_1(x_1) \equiv \log(\cosh(x_1))$ et $H_2(x_2) \equiv \cosh(x_2) - 1$

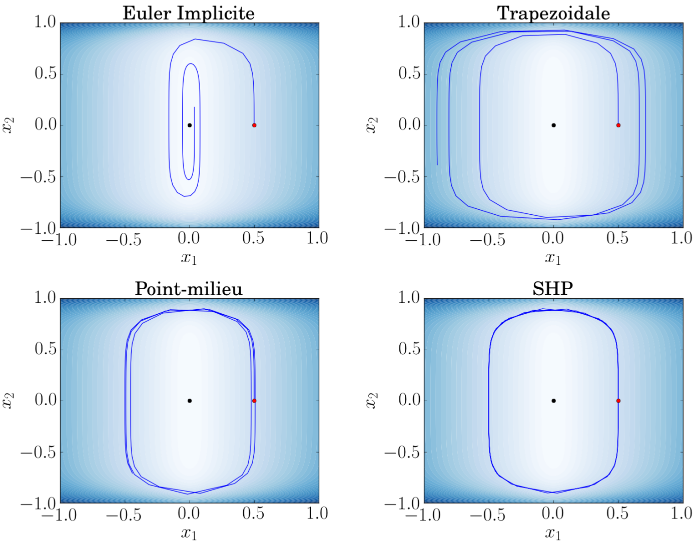


Expérience numérique

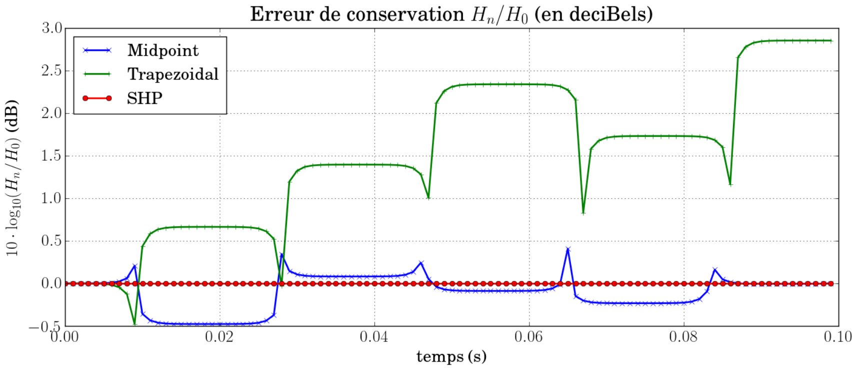
$H_1(x_1) \equiv \log(\cosh(x_1))$ et $H_2(x_2) \equiv \cosh(x_2) - 1$



Expérience numérique

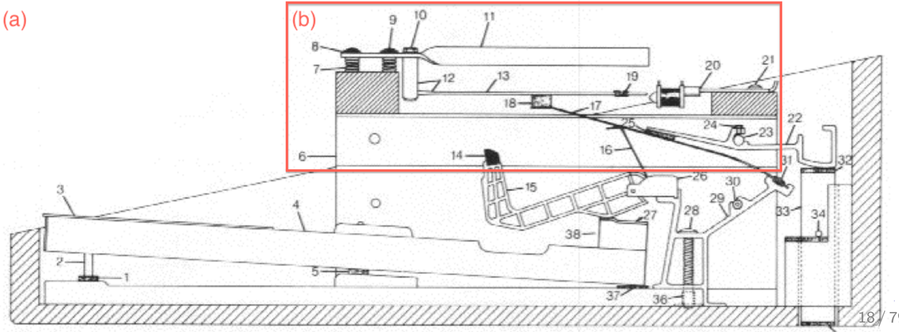


Expérience numérique



Application: Le Fender Rhodes

Application: Le Fender Rhodes

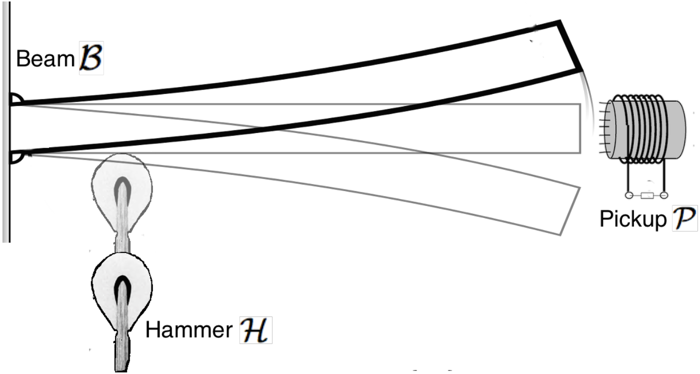


Système considéré

Marteau $\mathcal{H}$: Contact non-linéaire

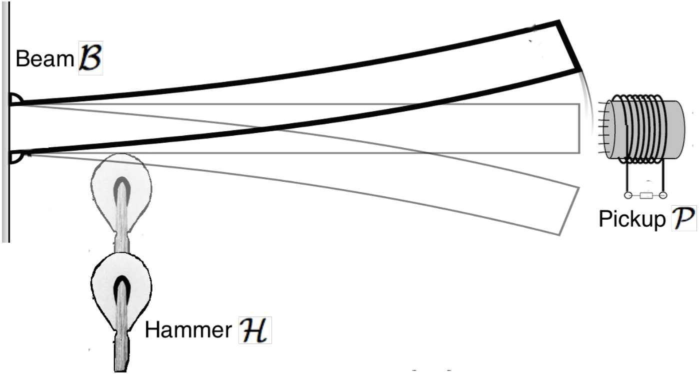
Poutre $\mathcal{B}$: Résonateur amorti (dimension infinie)

Capteur $\mathcal{P}$: Transducteur mécano-magnéto-électrique



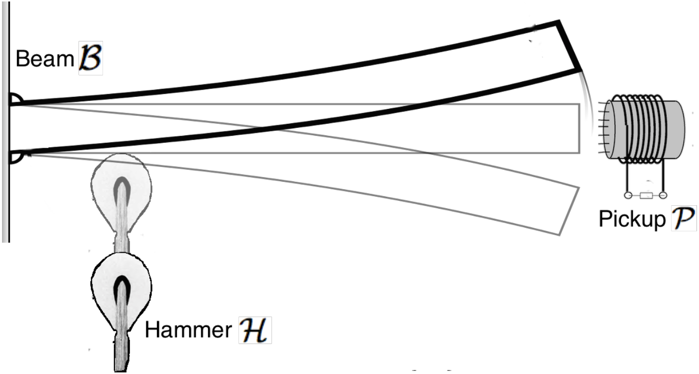
Objectif

- Simulation temps-réel et stable,
- Entrée: force sur le marteau,
- Sortie: tension électrique.

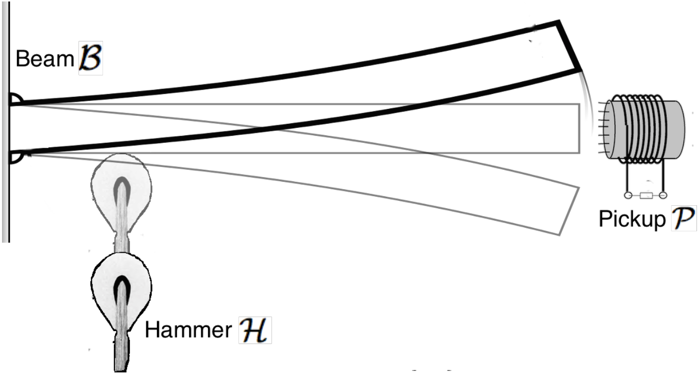


Approche par les systèmes Hamilotniens à ports

1. Modèles passifs des éléments ($\mathcal{H}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}$) en dimension finie,
2. Connexion conservative $\Rightarrow$ Système global passif,
3. Méthode numérique préservant la passivité $\Rightarrow$ Simulations stables.



Marteau $\mathcal{H}$

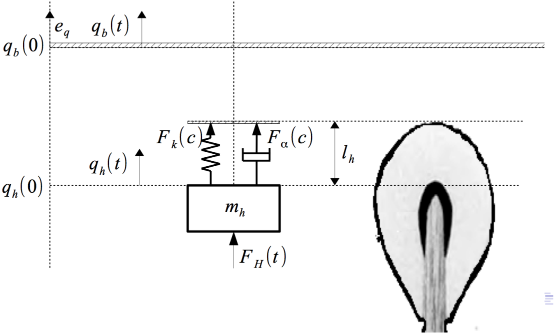


Marteau $\mathcal{H}$

Modèle disponible pour la dynamique

$$m_h \partial_t^2 q_h = -F_k(c) - F_\alpha(c) + F_{\mathcal{H}}$$

- écrasement du feutre $c(\delta q) = \max(\delta q + l_h, 0)$; $\delta q(t) = q_h(t) - q_b(t)$
- Force de rappel non-linéaire $F_k(c) = k_h c^\beta$
- Amortissement non-linéaire $F_\alpha(c) = \alpha_h \partial_t (c^\beta)$



Marteau $\mathcal{H}$

Modèle disponible pour la dynamique

$$m_h \partial_t^2 q_h = -F_k(c) - F_\alpha(c) + F_{\mathcal{H}}$$

- écrasement du feutre $c(\delta q) = \max(\delta q + l_h, 0)$; $\delta q(t) = q_h(t) - q_b(t)$
- Force de rappel non-linéaire $F_k(c) = k_h c^\beta$
- Amortissement non-linéaire $F_\alpha(c) = \alpha_h \partial_t (c^\beta)$

Système Hamiltonien à ports

	Variable	Fonction	Flux	Effort
m_h	$x_1 = m_h \partial_t q_h$	$h_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m_h}$	$v_1 = \frac{dh_1}{dx_1}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$
k_h	$x_2 = \delta q$	$h_2(x_2) = \frac{k_h}{(\beta+1)} c(x_2)^{\beta+1}$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$F_2 = \frac{dh_2}{dx_2}$
α_h	$w_3 = \partial_t(\delta q)$	$z_3(w_3, x_2) = \frac{\alpha_h}{\beta} c(x_2)^{\beta-1} w_3$	$v_3 = w$	$F_3 = z_3$
$F_{\mathcal{H}}$	$\oslash$	$\oslash$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$
$\partial_t q_b$	$\oslash$	$\oslash$	$v_5 = u_5$	$F_5 = -y_5$

Marteau $\mathcal{H}$

Système Hamiltonien à ports

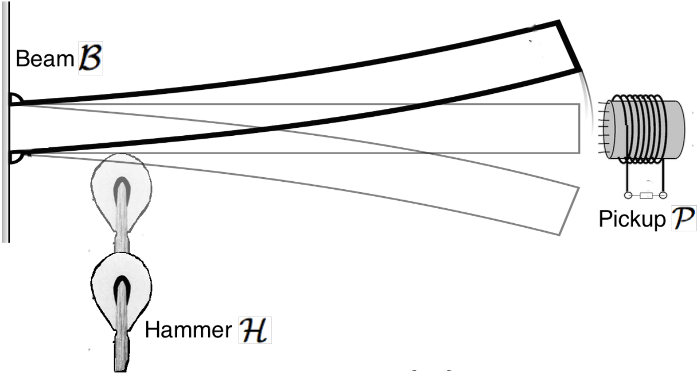
	Variable	Fonction	Flux	Effort
m_h	$x_1 = m_h \partial_t q_h$	$h_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m_h}$	$v_1 = \frac{dh_1}{dx_1}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$
k_h	$x_2 = \delta q$	$h_2(x_2) = \frac{k_h}{(\beta+1)} c(x_2)^{\beta+1}$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$F_2 = \frac{dh_2}{dx_2}$
α_h	$w_3 = \partial_t(\delta q)$	$z_3(w_3, x_2) = \frac{\alpha_h}{\beta} c(x_2)^{\beta-1} w_3$	$v_3 = w$	$F_3 = z_3$
$F_{\mathcal{H}}$	$\oslash$	$\oslash$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$
$\partial_t q_b$	$\oslash$	$\oslash$	$v_5 = u_5$	$F_5 = -y_5$

Structure

$$\mathbf{J_x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J_w} = 0, \mathbf{G_w} = 0, \mathbf{J_y} = 0$$

Poutre $\mathcal{B}$



Poutre $\mathcal{B}$

Modèle d'Euler-Bernoulli pour le déplacement transverse $q(z,t)$

$$\rho\partial_t^2 q(z,t) + \alpha\partial_t q(z,t) + \kappa\partial_z^4 q(z,t) = F(z,t) = \omega(z)f(t)$$

avec ρ, κ et α définis par unité de longueur,

$\omega(z) = \frac{1}{a_h}\mathbf{1}(z - z_h)_{[-a_h/2, +a_h/2]}$.

Conditions initiales

$q(z,0) = 0$ et $\partial_t q(z,0) = 0$

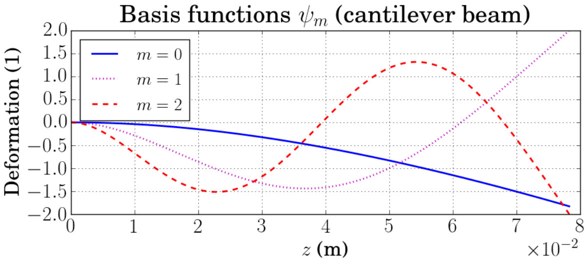
Conditions frontière

1. pas de déplacement de la base $q(0,t) = 0$,
2. pas de fléchissement à la base $\partial_z q(0,t) = 0$,
3. pas de moment fléchissant à l'extrémité $\partial_z^2 q(1,t) = 0$,
4. pas de cisaillement à l'extrémité $\partial_z^3 q(1,t) = 0$.

Poutre $\mathcal{B}$

Modèle d'Euler-Bernoulli pour le déplacement transverse $q(z,t)$

$$\rho\partial_t^2 q(z,t) + \alpha\partial_t q(z,t) + \kappa\partial_z^4 q(z,t) = F(z,t) = \omega(z)f(t)$$



Poutre $\mathcal{B}$

Projection sur la base orthonormée des modes propres $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_M)^\mathsf{T}$

$\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_M)^\mathsf{T} = \langle \omega, \Psi \rangle$
$\mathbf{q}_\mathcal{B} = (q_1, \ldots, q_M)^\mathsf{T} = \langle q, \Psi \rangle$
Pour le produit scalaire standard sur $L^2(0, l_b)$: $\langle f, g \rangle = \int_0^{l_b} f(z) g(z) \mathrm{d}z$

Modèle réduit d'état $\mathbf{x}_\mathcal{B} = (\mathbf{q}_\mathcal{B}, \rho\partial_t \mathbf{q}_\mathcal{B})^\mathsf{T}$:

$$\partial_t \mathbf{x}_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \frac{1}{\rho}\mathbf{I_d} \\ -\kappa \mathbf{L} & -\frac{\alpha}{\rho}\mathbf{I_d} \end{pmatrix} \mathbf{x}_\mathcal{B} + \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \Omega \end{pmatrix} f,$$

$\mathbf{L} = \mathrm{diag}(k_1^4, \ldots, k_M^4)$ pour les k_m vérifiant $\cos k_m l_b \cosh k_m l_b + 1 = 0$

Poutre $\mathcal{B}$

Modèle réduit d'état $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (\mathbf{q}_{\mathcal{B}}, \rho\partial_t\mathbf{q}_{\mathcal{B}})^\mathsf{T}$:

$$\partial_t\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \frac{1}{\rho}\mathbf{I_d} \\ -\kappa\mathbf{L} & -\frac{\alpha}{\rho}\mathbf{I_d} \end{pmatrix}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \Omega \end{pmatrix} f,$$

Système Hamiltonien à ports

- Composants stockants: $\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathrm{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\begin{pmatrix} \kappa\mathbf{L} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \rho^{-1}\mathbf{I_d} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \end{cases}$
- Composants dissipatifs: $\begin{cases} \mathbf{w} = \partial_t\mathbf{q}_{\mathcal{B}} \\ z(\mathbf{w}) = \frac{\alpha}{\rho}\mathbf{w} \end{cases}$
- Source: $\begin{cases} \mathbf{u} = f \\ \mathbf{y} = \partial_t q(z_h, t) \end{cases}$

Poutre $\mathcal{B}$

Système Hamiltonien à ports

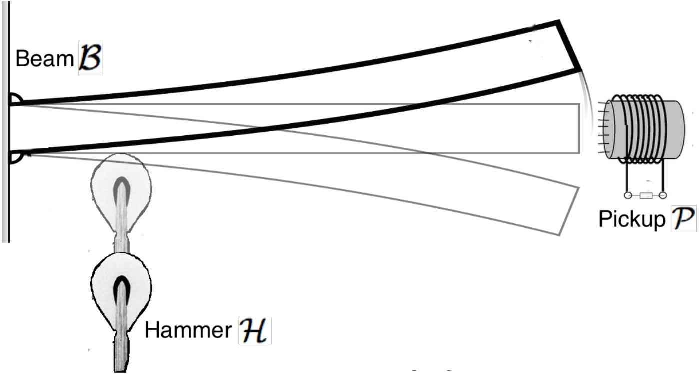
- Composants stockants: $\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathrm{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\intercal \begin{pmatrix} \kappa\mathbf{L} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \rho^{-1}\mathbf{I_d} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \end{cases}$
- Composants dissipatifs: $\begin{cases} \mathbf{w} = \partial_t \mathbf{q}_{\mathcal{B}} \\ z(\mathbf{w}) = \frac{\alpha}{\rho}\mathbf{w} \end{cases}$
- Source: $\begin{cases} \mathbf{u} = f \\ \mathbf{y} = \partial_t q(z_h, t) \end{cases}$

Structure

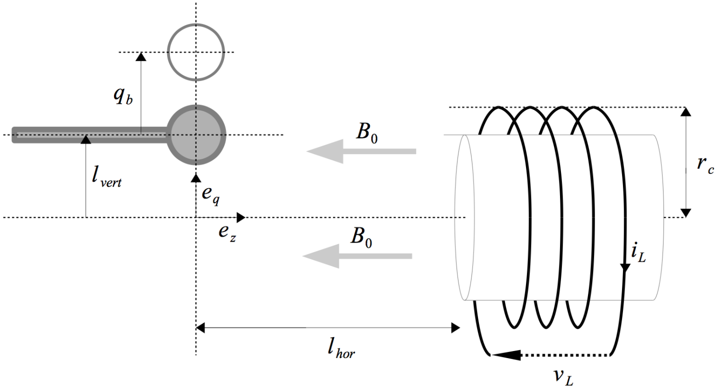
$$\mathbf{J_x} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbf{I_d} \\ -\mathbf{I_d} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbf{I_d} \end{pmatrix}, \mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \Omega \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J_w} = \mathbb{0}, \mathbf{G_w} = \mathbb{0}, \mathbf{J_y} = \mathbb{0}$$

Capteur $\mathcal{P}$



Capteur $\mathcal{P}$



Domaine magnétique

Deux champs complémentaires

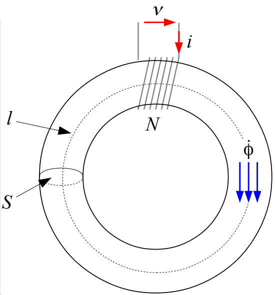
- champ d'excitation h
- champ d'induction $b = M_0(h) + M(h) \simeq M(h)$.

Approximation

- h constant sur une ligne de champ
- b constant sur une section

alors

- force magnétomotrice (fmm) $\xi = \oint_C h.dl = l.h$
- flux d'induction magnétique
  $\phi = \iint_S b.dS = S.b$



Stockage dans les ferromagnétiques

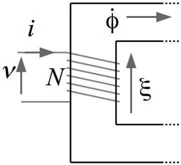
- On néglige la magnétisation du vide: $h \equiv h(b) = M^{-1}(b)$.
- Variation de la densité d'énergie magnétique: $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = h(b).\dot{b}$.

Variation d'énergie totale

$$\iiint_V \dot{\mathcal{E}} dV = S\, l\, h(b)\, \dot{b} = \xi\, \dot{\phi} = \nabla \mathrm{H}(x)\, \dot{x},$$

avec $x = \phi$ et $\nabla \mathrm{H}(x) = S\, l\, h\left(\frac{x}{S}\right) = \xi$.

Couplage électromagnétique



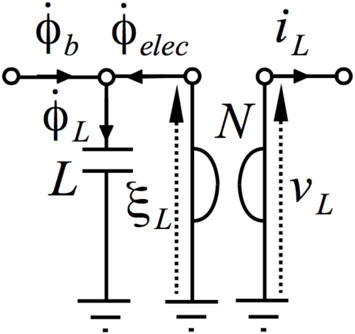
Bobinage de N tours à noyau ferreux

- Théorème d'Ampère: $\xi = N\,i$.
- Loi de Lenz-Faraday: $\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{N} v$.
- Gyrateur de Tellegen: $\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N \\ \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$.
- Couplage conservatif: $v.i = \dot{\phi}.\xi$.

Bobine $\equiv$ capacité magnétique

2 sources de variation du flux magnétique

1. Variation induite par le mouvement de la poutre $\dot{\phi}_b$
2. Variation induite par la tension électrique $\dot{\phi}_{elec} = \frac{v_L}{N}$



Pickup $\mathcal{P}$

Modèle disponible: potentiel magnétique perturbé

$$\phi_b \equiv \phi_b(B_0, q_b, l_{ver}, l_{hor}, r_c, perm_{rel}, perm_0)$$

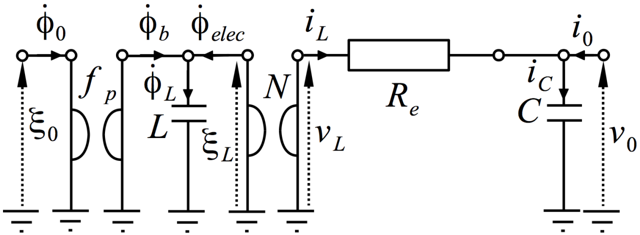
Variation $\partial_t \phi_b \equiv$ modulation de la source d'excitation constante $\xi_0 = \frac{lB_0}{\mu_0}$

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_b &= f_p\left(q_b, \partial_t q_b\right) \xi_0 \\ f_p\left(q_b, \partial_t q_b\right) &= \frac{2a_b^2 \mu_0 \Delta_\mu r_c}{l} \left(\frac{f_1(q_b) - 2l_{hor}^2}{f_1^2(q_b)} - \frac{f_2(q_b) - 2l_{hor}^2}{f_2^2(q_b)} \right) \partial_t q_b \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(q_b) &= (q_b - r_c + l_{ver})^2 + l_{hor}^2, \\ f_2(q_b) &= (q_b + r_c + l_{ver})^2 + l_{hor}^2. \end{aligned}$$

Capteur $\mathcal{P}$ et circuit de charge



Système Hamiltonien à ports

- Composants stockants: $\begin{cases} \mathbf{x} = (\phi_L, q_C)^\intercal \\ \mathrm{H}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{2C}x_2^2 \end{cases}$
- Composants dissipatifs: $\begin{cases} w = i_R \\ z(w) = R_e w \end{cases}$
- Sources: $\begin{cases} \mathbf{u} = (\xi_0, i_0)^\intercal \\ \mathbf{y} = (\partial_t \phi_0, v_0)^\intercal \end{cases}$

Capteur $\mathcal{P}$ et circuit de charge

Structure

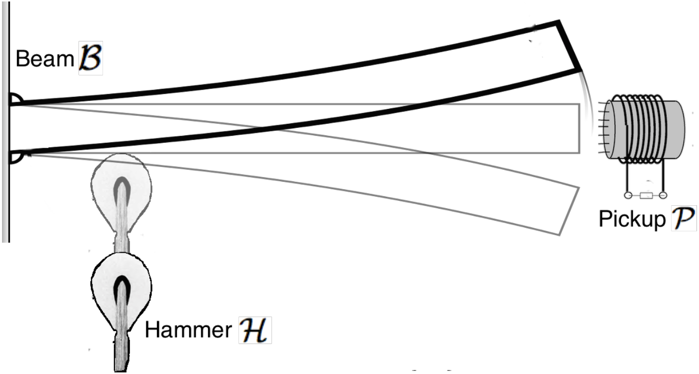
$$\mathbf{J_x} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} f_p(q_b, \partial_t q_b) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J_w} = 0, \ \mathbf{G_w} = \mathbb{0}, \ \mathbf{J_y} = \mathbb{0}$$

Système Hamiltonien à ports

- Composants stockants: $\begin{cases} \mathbf{x} = (\phi_L, q_C)^\intercal \\ \mathrm{H}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{2C}x_2^2 \end{cases}$
- Composants dissipatifs: $\begin{cases} w = i_R \\ z(w) = R_e w \end{cases}$
- Sources: $\begin{cases} \mathbf{u} = (\xi_0, i_0)^\intercal \\ \mathbf{y} = (\partial_t \phi_0, v_0)^\intercal \end{cases}$

Système global $\mathcal{H} + \mathcal{B} + \mathcal{P}$



Système global $\mathcal{H} + \mathcal{B} + \mathcal{P}$

Stockage

- Concaténation des états: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{x}_{\mathcal{P}}^\intercal)^\intercal$,
- Somme des énergies: $\mathtt{H}(\mathbf{x}) = \mathtt{H}_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_{\mathcal{H}}) + \mathtt{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_{\mathcal{B}}) + \mathtt{H}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}_{\mathcal{P}})$.

Dissipation

- Concaténation des variables: $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{w}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{w}_{\mathcal{P}}^\intercal)^\intercal$,
- Concaténation des lois constitutives: $\mathbf{z} = \left(\mathbf{z}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{z}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{z}_{\mathcal{P}}^\intercal\right)^\intercal$.

Ports externes

Connexion de la poutre au marteau et

- Concaténation des autres entrées: $\mathbf{u} = (f_h, h_0, i_0)^\intercal$
- Concaténation des autres sorties: $\mathbf{y} = (\partial_t q_h, \partial_t \phi_0, v_0)^\intercal$.

Système global $\mathcal{H} + \mathcal{B} + \mathcal{P}$

Stockage

- Concaténation des états: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{x}_{\mathcal{P}}^\intercal)^\intercal$,
- Somme des énergies: $\mathtt{H}(\mathbf{x}) = \mathtt{H}_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_{\mathcal{H}}) + \mathtt{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_{\mathcal{B}}) + \mathtt{H}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}_{\mathcal{P}})$.

Dissipation

- Concaténation des variables: $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{w}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{w}_{\mathcal{P}}^\intercal)^\intercal$,
- Concaténation des lois constitutives: $\mathbf{z} = \left(\mathbf{z}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{z}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{z}_{\mathcal{P}}^\intercal\right)^\intercal$.

Ports externes

Connexion de la poutre au marteau et

- Concaténation des autres entrées: $\mathbf{u} = (f_h, h_0, i_0)^\intercal$
- Concaténation des autres sorties: $\mathbf{y} = (\partial_t q_h, \partial_t \phi_0, v_0)^\intercal$.

Système global $\mathcal{H} + \mathcal{B} + \mathcal{P}$

Stockage

- Concaténation des états: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{x}_{\mathcal{P}}^\intercal)^\intercal$,
- Somme des énergies: $\mathtt{H}(\mathbf{x}) = \mathtt{H}_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_{\mathcal{H}}) + \mathtt{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_{\mathcal{B}}) + \mathtt{H}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}_{\mathcal{P}})$.

Dissipation

- Concaténation des variables: $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{w}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{w}_{\mathcal{P}}^\intercal)^\intercal$,
- Concaténation des lois constitutives: $\mathbf{z} = \left(\mathbf{z}_{\mathcal{H}}^\intercal, \mathbf{z}_{\mathcal{B}}^\intercal, \mathbf{z}_{\mathcal{P}}^\intercal\right)^\intercal$.

Ports externes

Connexion de la poutre au marteau et

- Concaténation des autres entrées: $\mathbf{u} = (f_h, h_0, i_0)^\intercal$
- Concaténation des autres sorties: $\mathbf{y} = (\partial_t q_h, \partial_t \phi_0, v_0)^\intercal$.

Système global $\mathcal{H} + \mathcal{B} + \mathcal{P}$

Structure

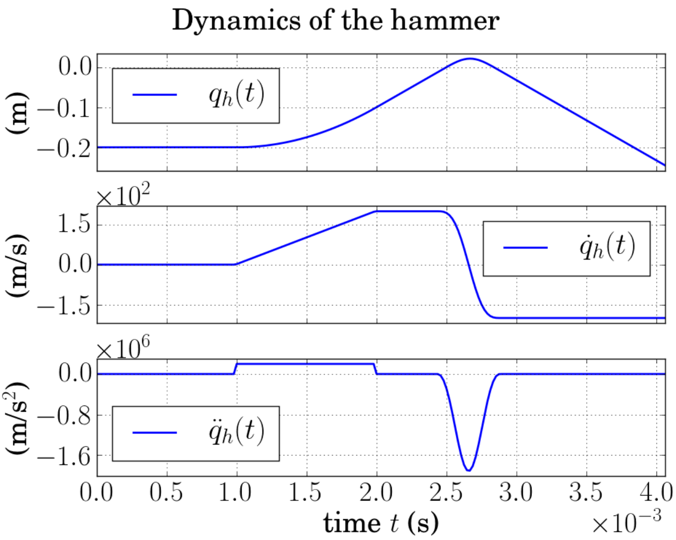
$$\mathbf{J_x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 0 & 0 \\ 1 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & -\Omega^\intercal & 0 & 0 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbf{I_d} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \Omega & -\mathbf{I_d} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 0 & 0 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 0 & -\frac{1}{N} \\ 0 & 0 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} & 0 \\ 0 & \mathbb{0} & 0 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ -\Omega & \mathbf{I_d} & \mathbb{0} \\ 0 & \mathbb{0} & \frac{1}{N} \\ 0 & \mathbb{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 0 & f_{\mathcal{P}} & 0 \\ 0 & \mathbb{0} & 1 \end{pmatrix}$$

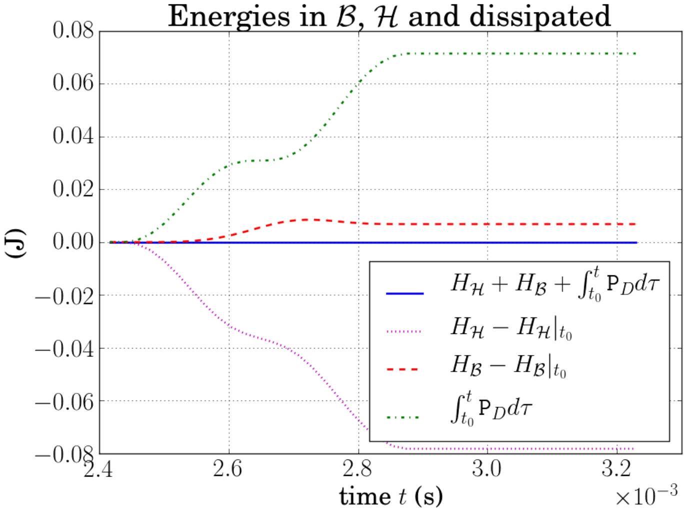
$$\mathbf{J_w} = \mathbb{0}, \ \mathbf{G_w} = \mathbb{0}, \ \mathbf{J_y} = \mathbb{0}$$

Simulations

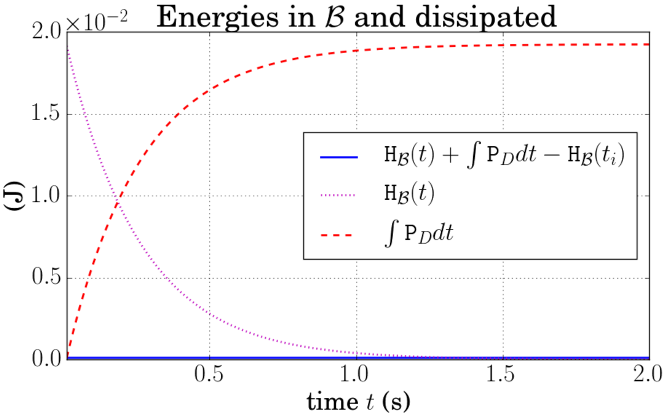
Simulations



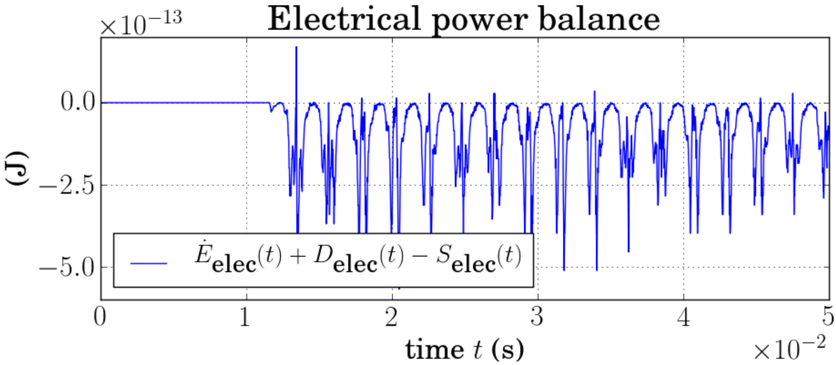
Simulations



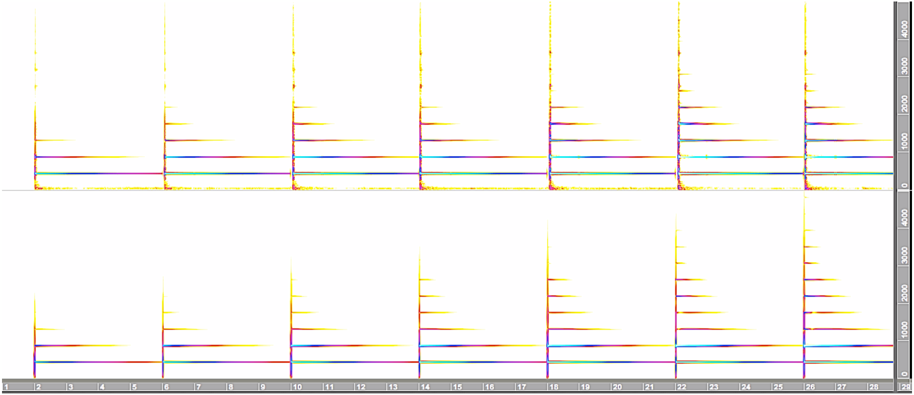
Simulations



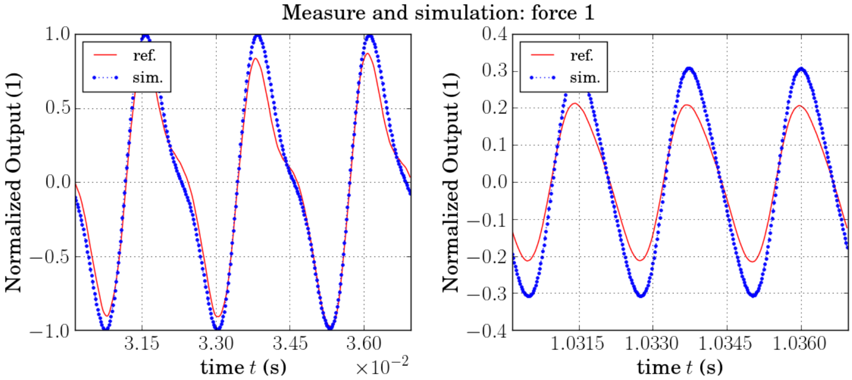
Simulations



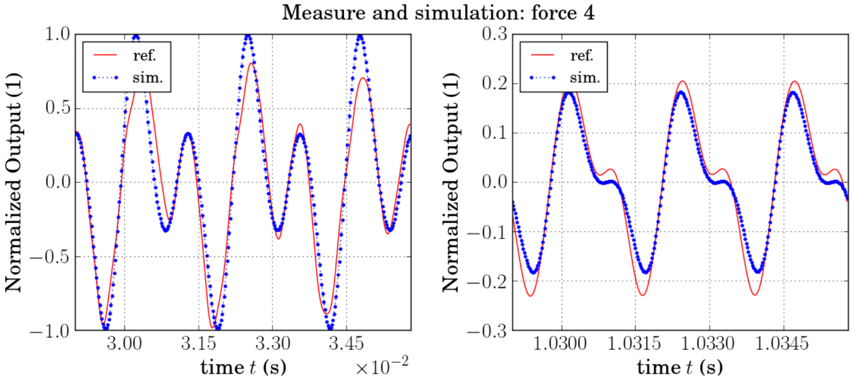
Comparaisons aux mesures



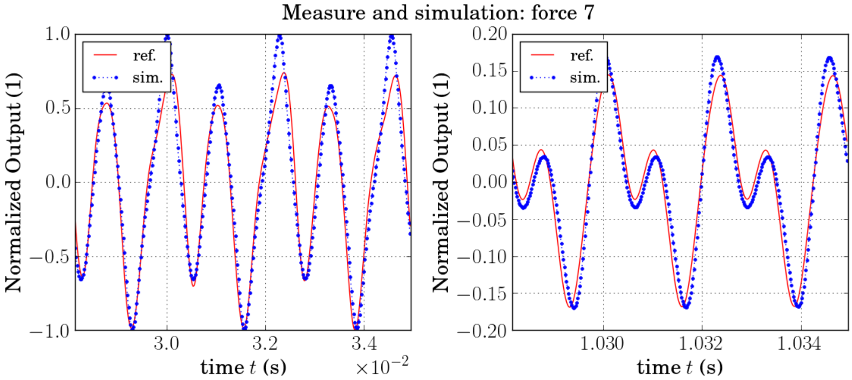
Comparaisons aux mesures



Comparaisons aux mesures



Comparaisons aux mesures



Génération automatique

Objectif

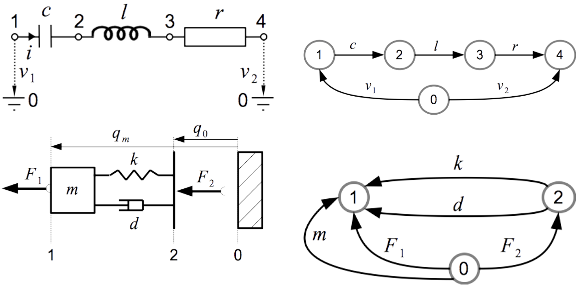
Génération automatique de la structure SHP à partir d'un dictionnaire de composants élémentaires et d'un schéma d'interconnexion.

Objets

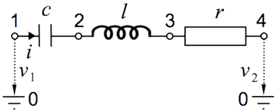
- Le dictionnaire de composants encode les lois constitutives,
- Le graphe du système encode le schéma d'interconnexion.

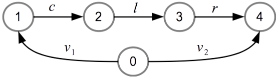
Graphe du système

- Chaque paire (flux/effort) correspond à une branche,
- direction de la branche ≡ orientation positive du flux,
- convention récepteur pour l'effort.



Système électrique





Composants

- $n_\mathbf{x} = 2$ stockants (c et l),
- $n_\mathbf{w} = 1$ dissipatifs (r),
- $n_\mathbf{u} = 2$ sources (v_1 et v_2).

Graphe

- $n_N = 4$ noeuds plus la référence $\mathtt{N}_0$,
- $n_B = n_\mathbf{x} + n_\mathbf{w} + n_\mathbf{u} = 5$ branches.

Système électrique

Dictionnaire

Label	Definitions		Effort e	Flux f
l	$x_l = \phi$	$h_l(x_l) = \frac{x_l^2}{2L}$	$e_l = \partial_t x_l$	$f_l = h'_l(x_l)$
c	$x_c = q$	$h_c(x_c) = \frac{x_c^2}{2C}$	$e_c = h'_c(x_c)$	$f_c = \partial_t x_c$
r	$w_r = i$	$z_r(w_r) = Rw_r$	$e_r = z_r(w_r)$	$f_r = w_r$
v_1	$u_1 = \nu_1$	$y_1 = i$	$e_1 = u_1$	$f_1 = y_1$
v_2	$u_2 = \nu_2$	$y_2 = i$	$e_2 = u_2$	$f_2 = y_2$

$$\begin{pmatrix} e_l \\ f_c \\ f_r \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} f_l \\ e_c \\ e_r \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Structure SHP

1. arrangement des flux $\mathbf{f}$ et efforts $\mathbf{e}$ en deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$,
2. relations d'interconnexion $\mathbf{a} = \mathbf{J}\mathbf{b}$,

$\mathbf{J}$ correspond aux lois de conservations qui s'appliquent sur $\mathbf{f}$ et $\mathbf{e}$.

Composants stockants et sources: l'étape ① est directe.

Composants dissipatifs: on choisit un pilotage par l'effort ou le flux.

Type	effort-controlled[a]		flux-controlled[b]	
	e	f	f	e
Stockage	$\partial_t x$	$h'(x)$	$\partial_t x$	$h'(x)$
Dissipation	w	$z(w)$	w	$z(w)$
Source	y	u	y	u

Conventions

Graphe $\mathtt{G} = (\mathtt{N}, \mathtt{B})$ avec $n_N + 1$ noeuds et $n_B = n_\mathbf{x} + n_\mathbf{w} + n_\mathbf{u}$ branches,

Potentiels: $\epsilon = (\epsilon_0, \cdots, \epsilon_{n_N})^\intercal$ sur les noeuds,

Flux/effort (e_b, f_b) sur chaque branche: $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}^{2n_B}$.

Convention récepteur pour une branche $\mathtt{B}_b : \mathtt{N}_i \to \mathtt{N}_j$, $e_b = \epsilon_i - \epsilon_j$

puissance reue: $P_n = e_n\, f_n$.

Matrice d'incidence $\Gamma \in \mathbb{R}^{n_N+1 \times n_B}$

$$[\Gamma]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si la branche } j \text{ entre le noeud } i \\ -1 & \text{si la branche } j \text{ sort du noeud } i \end{cases}$$

Partition du graphe

Partition des branches $\mathtt{B} = \{\mathtt{B}_1, \mathtt{B}_2\}$

- $\mathtt{B}_1$ l'ensemble des n_1 branches contrôlées par l'effort
- $\mathtt{B}_2$ l'ensemble des n_2 branches contrôlées par le flux

Partition de la matrice d'incidence

$$\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\gamma_0} \\ \hline \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}\right), \quad \text{avec } \gamma_0 \in \mathbb{R}^{1\times n_B},\ \gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_1}\ \gamma_2 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_2}.$$

Le potentiel ϵ_0 sur $\mathtt{N}_0$ n'influence pas les flux et efforts du système.

$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^\intercal$ et $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)^\intercal$

- $\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2)^\intercal$,
- $\tilde{\mathbf{b}} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2)^\intercal$.

Lois de conservation

Lois de Kirchhoff généralisées

$$\begin{aligned}(\gamma_1, \gamma_2)^\mathsf{T}\, \epsilon &= \mathbf{e},\\ (\gamma_1, \gamma_2)\, \mathbf{f} &= 0.\end{aligned}$$

Proposition

Le graph $\mathtt{G} = \{\mathtt{N}, (\mathtt{B}_1, \mathtt{B}_2)\}$ est réalisable sous la forme SHP si et seulement si γ_2 est inversible.

- $\mathbf{e}_1 = \gamma_1^\mathsf{T} \epsilon$ et $\mathbf{e}_2 = \gamma_2^\mathsf{T} \epsilon$,
- $\gamma_2 \mathbf{f}_2 = -\gamma_1 \mathbf{f}_1$,
- si γ_2 est inversible, on définit $\gamma = \gamma_2^{-1} \gamma_1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mathsf{T} \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{j}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{a}}}.$$

Algorithme

Détermine le type des composants dissipatifs pour que γ_2 soit inversible.

Matrice de réalisabilité

$$[\Lambda]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si la branche } j \text{ impose le potentiel sur le noeud } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partition

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\lambda_0} \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \right).$$

Algorithme

Matrice de réalisabilité

$$[\Lambda]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si la branche } j \text{ impose le potentiel sur le noeud } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

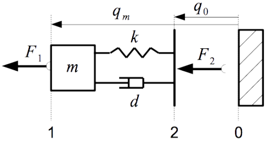
Partition

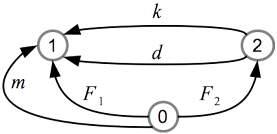
$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\lambda_0} \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \right).$$

Heuristiques

- Si λ_2 est une matrice de permutation, le graphe $\mathtt{G}$ est réalisable.
- Aucune branche n'impose le potentiel sur $\mathtt{N}_0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$.
- Aucune branche de $\mathtt{B}_1$ n'impose de potentiel $\Rightarrow \Lambda(:, \mathtt{B}_1) = 0$.
- Les branches $\mathtt{B}_2$ propagent le potentiel d'un noeud à l'autre $\Rightarrow$ $\sum \Lambda(:, b) = 1, \forall b \in \mathtt{B}_2$.

Exemple





Partition

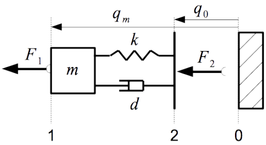
- $\mathrm{B}_1 = \{\mathrm{B}_k, \mathrm{B}_d, \mathrm{B}_{F_1}\}$ contrôlées par l'effort,
- $\mathrm{B}_2 = \{\mathrm{B}_m, \mathrm{B}_{F_2}\}$ contrôlées par le flux.

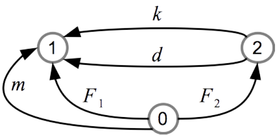
Matrice d'incidence

$$\Gamma = \begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_k & \mathrm{B}_d & \mathrm{B}_{F_1} \end{array} & \begin{array}{cc} \mathrm{B}_m & \mathrm{B}_{F_2} \end{array}
\end{array}$$

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \mathrm{N}_0 \\ \mathrm{N}_1 \\ \mathrm{N}_2 \end{array};$$

Exemple





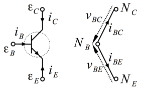
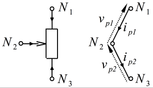
Partition

- $B_1 = \{B_k, B_d, B_{F_1}\}$ contrôlées par l'effort,
- $B_2 = \{B_m, B_{F_2}\}$ contrôlées par le flux.

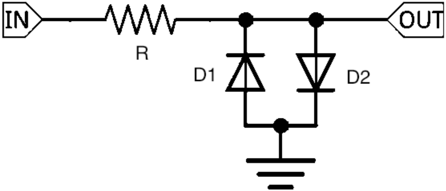
Matrice de réalisabilité retournée par l'algorithme

$$\Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} B_k & B_d & B_{F_1} & B_m & B_{F_2} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{array}.$$

éléments composés

3-ports			
Dissipative	Diagram	**w**	**z(w)**
NPN Transistor		$\begin{pmatrix} v_{BC} \\ v_{BE} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i_{BC} \\ i_{BE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_R & -1 \\ -1 & \alpha_F \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_S \left(e^{v_{BC}/v_t} - 1 \right) \\ I_S \left(e^{v_{BE}/v_t} - 1 \right) \end{pmatrix}$
Potentiometer		$\begin{pmatrix} v_{p1} \\ i_{p2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i_{p1} \\ v_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{p1}/(1+\alpha.R_p) \\ i_{p2}.(1+(1-\alpha).R_p) \end{pmatrix}$

Application: Diode-clipper



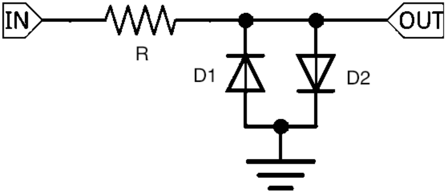
Graphe

- $n_\mathbf{w} = 3$ (résistance et 2 diodes)
- $n_\mathbf{u} = 2$ (entrée/sortie)

Système Hamiltonien à ports

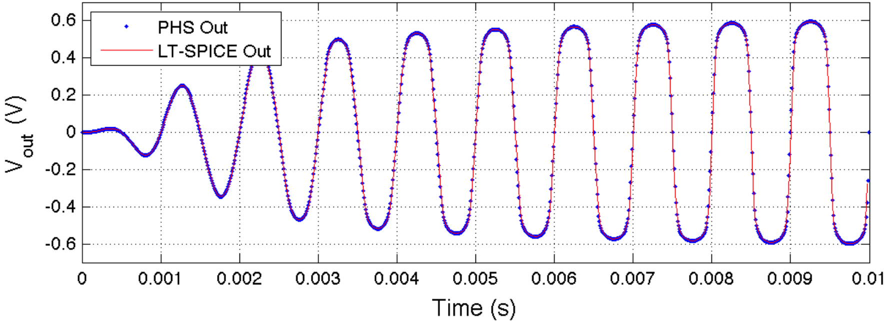
$$\underbrace{\left(\begin{array}{c} i_R \\ v_{D1} \\ v_{D2} \\ \hline i_{IN} \\ v_{OUT} \end{array}\right)}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\mathbf{J}} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c} v_R \\ i_{D1} \\ i_{D2} \\ \hline v_{IN} \\ i_{OUT} \end{array}\right)}_{\mathbf{a}}.$$

Application: Diode-clipper

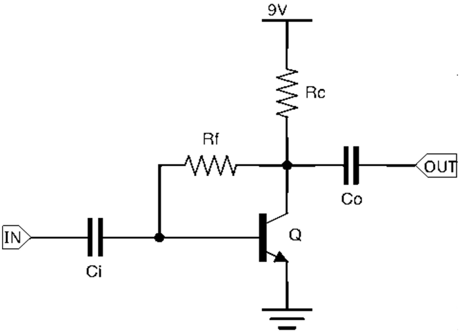


Graphe

- $n_{\mathbf{w}} = 3$ (résistance et 2 diodes)
- $n_{\mathbf{u}} = 2$ (entrée/sortie)



Application: Amplificateur audio à transistor



Graphe

- $n_x = 2$ (2 capacitances)
- $n_w = 4$ (2 résistances et 2 transistors)
- $n_u = 2$ (entrée/sortie et 9V)

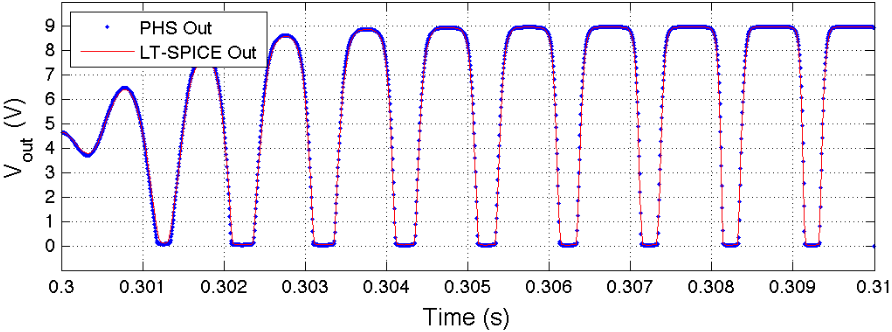
Application: Amplificateur audio à transistor

Système Hamiltonien à ports (Rc est pilotée en courant et Rf en tension)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b} &= \left(i_{\mathrm{Ci}},\ i_{\mathrm{Co}} \middle| v_{\mathrm{Rf}},\ i_{\mathrm{Rc}},\ v_{\mathrm{Bc}},\ v_{\mathrm{Be}} \middle| \mathrm{I}_{\mathrm{IN}},\ v_{\mathrm{OUT}},\ i_{\mathrm{VCC}}\right) \\
\mathbf{a} &= \left(v_{\mathrm{Ci}},\ v_{\mathrm{Co}} \middle| i_{\mathrm{Rf}},\ v_{\mathrm{Rc}},\ i_{\mathrm{Bc}},\ i_{\mathrm{Be}} \middle| v_{\mathrm{IN}},\ i_{\mathrm{OUT}},\ v_{\mathrm{VCC}}\right)
\end{aligned}
$$

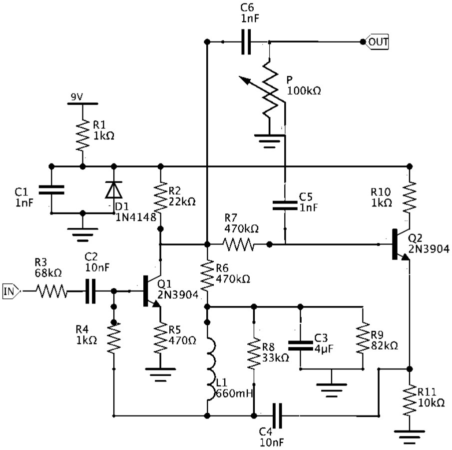
$$
\mathbf{J} = \left(\begin{array}{cc|cccc|ccc}
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

Application: Amplificateur audio à transistor



Application: pédale d'effet "wah-wah" Dunlop CryBaby

Application: pédale d'effet "wah-wah" Dunlop CryBaby

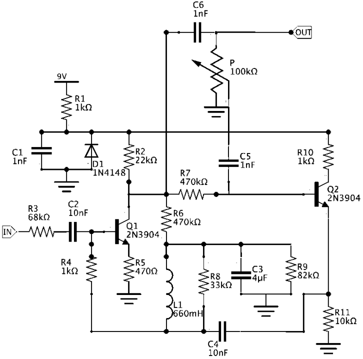


Graphe

- $n_{\mathbf{x}}$=7 branches de stockage (6 capacités et 1 inductance),
- $n_{\mathbf{w}}$ = 18 branches dissipatives (11 résistances, 1 diode, 2 NPN transistors et 1 potentiometer),
- $n_{\mathbf{u}}$=3 ports (entrée/sortie et 9V).

Le potentiomètre pilote l'effet audio.

Application: pédale d'effet "wah-wah" Dunlop CryBaby



Résistances R_1, $R_6 \cdots R_9$ et R_{11} sont contrôlées par l'effort.

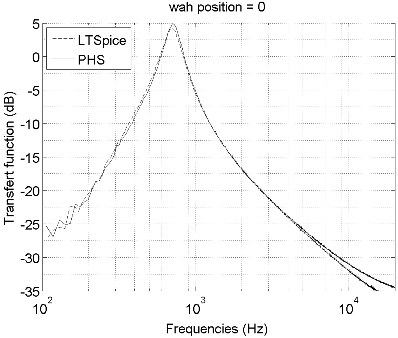
Système Hamiltonien à ports

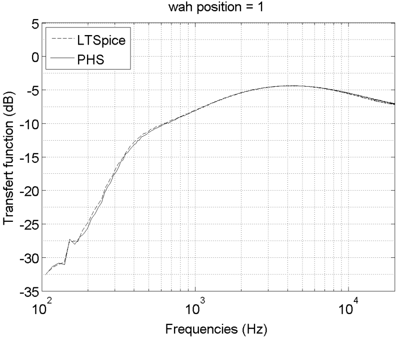
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= [i_{C1}, \cdots, i_{C_6}, v_{L_1}]^\intercal, \\ \nabla \mathrm{H}(\mathbf{x}) &= [v_{C1}, \cdots, v_{C_6}, i_{L_1}]^\intercal, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= [\mathbf{w}_R | v_d | v_{BC_1}, v_{BE_1} | v_{BC_2}, v_{BE_2} | v_{p1}, i_{p2}]^\intercal, \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) &= [\mathbf{z}_R | i_d | i_{BC_1}, i_{BE_1} | i_{BC_2}, i_{BE_2} | i_{p1}, v_{p2}]^\intercal, \end{aligned}$$

($\mathbf{w}_R$ et $\mathbf{z}_R$ en fonction du type de contrôle)

$$\begin{aligned} \textit{Entrées} \quad \mathbf{u} &= [v_{in}, i_{out}, v_{cc}]^\intercal, \\ \textit{Sorties} \quad \mathbf{y} &= [i_{in}, v_{out}, i_{cc}]^\intercal. \end{aligned}$$

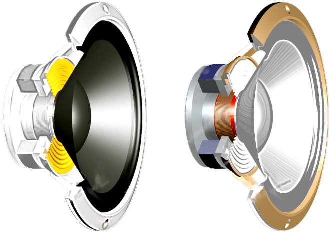

wah position = 0
LTSpice
PHS
Transfert function (dB)
Frequencies (Hz)
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
10^2
10^3
10^4


wah position = 1
LTSpice
PHS
Transfert function (dB)
Frequencies (Hz)
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
10^2
10^3
10^4

Le haut-parleur électrodynamique

Un modèle de haut parleur, pour quoi?

- ~~Simulation directe pour écoute~~
- Monitoring en fonctionnement (température, état mécanique)
- Prototypage
- Compensation des non-linéarités



Modèle SHP du haut-parleur

Composant électriques

Labels			flux $\equiv i$ (A)	effort $\equiv v$ (V)
(c)	$x_{\mathrm{C}} = \phi$	$\mathtt{H}_{\mathrm{C}}(x_{\mathrm{C}}) = \frac{x_{\mathrm{C}}^2}{2 \cdot L}$	$i_{\mathrm{C}} = \frac{\partial \mathtt{H}_{\mathrm{C}}}{\partial x_{\mathrm{C}}}$	$v_{\mathrm{C}} = \partial_t x_{\mathrm{C}}$
(r)	$w_{\mathrm{r}} = i_{\mathrm{r}}$	$z_{\mathrm{r}}(w_{\mathrm{r}}) = R_{\mathrm{r}} \cdot w_{\mathrm{r}}$	$i_{\mathrm{r}} = w_{\mathrm{r}}$	$v_{\mathrm{r}} = z_{\mathrm{r}}(w_{\mathrm{r}})$
(a)			$i_{\mathrm{a}} = y_{\mathrm{a}}$	$v_{\mathrm{a}} = u_{\mathrm{a}}$

Composants mécaniques

Labels			flux $\equiv \partial_t q$ $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$	effort $\equiv F$ (N)
(m)	$x_{\mathrm{m}} = m \cdot \partial_t q$	$\mathtt{H}_{\mathrm{m}}(x_{\mathrm{m}}) = \frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2 \cdot m}$	$\partial_t q = \frac{\partial \mathtt{H}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{\mathrm{m}}}$	$F_{\mathrm{m}} = \partial_t x_{\mathrm{m}}$
(s)	$x_{\mathrm{s}} = q$	$\mathtt{H}_{\mathrm{s}}(x_{\mathrm{s}}) = \frac{k_0}{2} x_{\mathrm{s}}^2 + \mathtt{H}_{sat}(x_{\mathrm{s}})$	$\partial_t q = \partial_t x_{\mathrm{s}}$	$F_{\mathrm{s}} = \frac{\partial \mathtt{H}_{\mathrm{s}}}{\partial x_{\mathrm{s}}}$
(d)	$w_{\mathrm{d}} = \partial_t q$	$z_{\mathrm{d}}(w_{\mathrm{d}}) = R_{\mathrm{d}} \cdot w_{\mathrm{d}}$	$\partial_t q = w_{\mathrm{d}}$	$F_{\mathrm{d}} = z_{\mathrm{d}}(w_{\mathrm{d}})$

Modèle SHP du haut-parleur

La matrice de connection est obtenue à partir des lois de Kirchhoff et de Newton appliquées à

$$\begin{array}{rclrcl} \partial_t \mathbf{x} & = & [v_\mathrm{C}, m\partial_t^2 q, \partial_t q]^\intercal, & \nabla \mathrm{H}(\mathbf{x}) & = & [i_\mathrm{C}, \partial_t q, F_\mathrm{S}]^\intercal \\ \mathbf{w} & = & [i_\mathrm{r}, \partial_t q]^\intercal, & \mathbf{z} & = & [v_\mathrm{r}, F_\mathrm{d}]^\intercal \\ \mathbf{y} & = & i_\mathrm{a}, & \mathbf{u} & = & v_\mathrm{a} \end{array} \quad (2)$$

$$\mathbf{J_x} = \begin{pmatrix} 0 & -Bl & 0 \\ +Bl & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{J_w} = 0, \; \mathbf{G_w} = 0, \; \mathbf{J_y} = 0.$$

Résultats de simulation directe

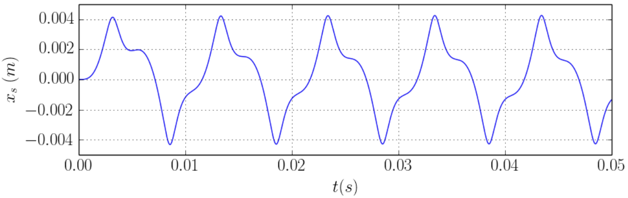


Figure: Position simulée sous excitation sinusodale 100V/100Hz (FANE Sovereign 12-500LF).

Parameter	Value	Paramètre	Valeur
m	0.075 (kg)	Bl	16.37 (T·m)
L	2.36 (mH)	k_0	7.14 (N·m^{-1})
R_r	5.9 (Ω)	k_s	100 (N·m^{-1})
R_d	3 (N·s·m^{-1})	q_{sat}	5.17 (mm)

Table: Physical parameters for the FANE Sovereign 12-500LF loudspeaker.

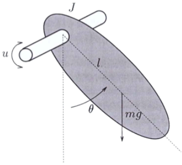
Platitude et planification de trajectoire: Le principe

On dispose d'un ensemble de variables indépendantes $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{n_\mu}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \varphi_{\mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\mu}, \partial_t \boldsymbol{\mu}, \cdots, \partial_t^{(n)} \boldsymbol{\mu}\right) \\ \mathbf{u} &= \varphi_{\mathbf{u}}\left(\boldsymbol{\mu}, \partial_t \boldsymbol{\mu}, \cdots, \partial_t^{(m)} \boldsymbol{\mu}\right). \end{aligned}$$

Alors pour toute trajectoire admissible $\boldsymbol{\mu}^\star$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\star &= \varphi_{\mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\mu}^\star, \partial_t \boldsymbol{\mu}^\star, \cdots, \partial_t^{(n)} \boldsymbol{\mu}^\star\right) \\ \mathbf{u}^\star &= \varphi_{\mathbf{u}}\left(\boldsymbol{\mu}^\star, \partial_t \boldsymbol{\mu}^\star, \cdots, \partial_t^{(m)} \boldsymbol{\mu}^\star\right) \end{aligned}$$



Exemple: $u(t) = J\partial_t^2\theta(t) + mgl\sin\theta(t)$

Variable plate: θ

On souhaite suivre la trajectoire $\theta^\star(t)$

Commande: $u^\star(t) = J\partial_t^2\theta^\star(t) + mgl\sin\theta^\star(t)$

Loi de commande

Platitude du haut-parleur

- La position est la sortie plate $\mu = q$
- $\mu = \varphi_{\boldsymbol{\mu}}(x_3)$
- $\mathbf{x} = \varphi_{\mathbf{x}}(\mu, \partial_t\mu, \partial_t^2\mu) = \begin{pmatrix} \frac{L}{Bl}\left(m \cdot \partial_t^2\mu + R_\mathrm{d} \cdot \partial_t\mu + F_s(\mu)\right) \\ m \cdot \partial_t\mu \\ \mu \end{pmatrix}$

Expression analytique de l'entrée $v_\mathrm{a} = \mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \varphi_{\mathbf{u}}\left(\mu, \partial_t\mu, \partial_t^2\mu, \partial_t^3\mu\right) = \begin{aligned} &\frac{m \cdot L}{Bl} \cdot \partial_t^3\mu + \frac{R_\mathrm{d} \cdot L + Re \cdot m}{Bl} \cdot \partial_t^2\mu \\ &+ \left(\partial_x F_s(\mu) + \frac{L + Re \cdot R_\mathrm{d}}{Bl} + Bl\right) \cdot \partial_t\mu \\ &+ \frac{R_\mathrm{r}}{Bl} \cdot F_s(\mu). \end{aligned}$$

Interprétation par les SHP

Entrée du sous-système mécanique $(\mathrm{m}, \mathrm{s}, \mathrm{d})$: $F_{\mathrm{L}} = F_{\mathrm{m}} + F_{\mathrm{s}} + F_{\mathrm{d}}$

Masse	$F_{\mathrm{m}} \xleftarrow{\partial_t} m\partial_t q \xleftarrow{\partial_x \mathtt{H}_{\mathrm{m}}^{-1}} \partial_t q \xleftarrow{\partial_t} \mu$
Force de rappel	$F_{\mathrm{s}} \xleftarrow{\partial_x \mathtt{H}_{\mathrm{s}}} \mu$
Amortissement	$F_{\mathrm{d}} \xleftarrow{z_{\mathrm{d}}} \partial_t q \xleftarrow{\partial_t} \mu.$

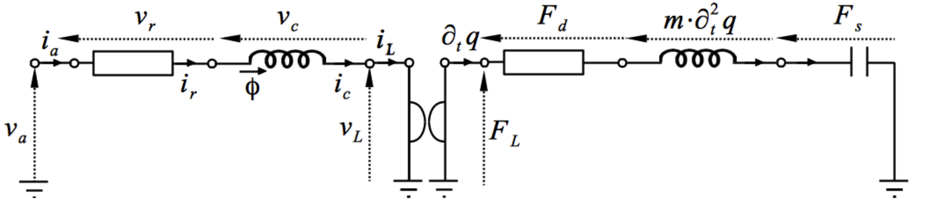


Figure: Schéma électrique équivalent.

Interprétation par les SHP

Entrée du sous-système mécanique $(\mathrm{m}, \mathrm{s}, \mathrm{d})$: $F_{\mathrm{L}} = F_{\mathrm{m}} + F_{\mathrm{s}} + F_{\mathrm{d}}$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Masse} & F_{\mathrm{m}} \overset{\partial_t}{\leftarrow} m\partial_t q \xleftarrow{\partial_x \mathtt{H}_{\mathrm{m}}^{-1}} \partial_t q \overset{\partial_t}{\leftarrow} \mu \\
\text{Force de rappel} & F_{\mathrm{s}} \overset{\partial_x \mathtt{H}_{\mathrm{s}}}{\longleftarrow} \mu \\
\text{Amortissement} & F_{\mathrm{d}} \overset{z_{\mathrm{d}}}{\leftarrow} \partial_t q \overset{\partial_t}{\leftarrow} \mu.
\end{array}
$$

entrée du sous-système électrique: $v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{C}} + v_{\mathrm{r}} + v_{\mathrm{L}}$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Bobine} & v_{\mathrm{C}} \overset{\partial_t}{\leftarrow} \phi \xleftarrow{\partial_x \mathtt{H}_{\mathrm{C}}^{-1}} i_{\mathrm{C}} = F_{\mathrm{L}}/Bl \\
\text{Résistance} & v_{\mathrm{r}} \overset{z_{\mathrm{r}}}{\leftarrow} i_{\mathrm{r}} = F_{\mathrm{L}}/Bl \\
\text{Tension induite} & v_{\mathrm{L}} = Bl \cdot \partial_t \mu.
\end{array}
$$

Interpretation par les SHP

Coordonnées de Brunovsky naturelle

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \varphi_{\mathbf{x}}(\mu, \partial_t \mu, \partial_t^2 \mu) \\
&= \begin{pmatrix}
(\partial_x \mathrm{H}_{\mathsf{C}})^{-1}\left(\frac{\partial_t (\partial_x \mathrm{H}_{\mathsf{m}})^{-1}(\partial_t \mu) + z_{\mathsf{d}}(\partial_t \mu) + \partial_x \mathrm{H}_{\mathsf{S}}(\mu)}{Bl}\right) \\
(\partial_x \mathrm{H}_{\mathsf{m}})^{-1}(\partial_t \mu) \\
\mu
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dimensionnement des actionneurs

- On dispose de $\mathbf{u}(\mu, \partial_t \mu, \cdots)$ et $\mathbf{y}(\mu, \partial_t \mu, \cdots)$,
- Puissance nécessaire pour atteindre et suivre la trajectoire:

$$
\mathcal{P}(\mu, \partial_t \mu, \cdots) = \mathbf{u}(\mu, \partial_t \mu, \cdots)^{\intercal} \cdot \mathbf{y}(\mu, \partial_t \mu, \cdots)
$$

Resultats

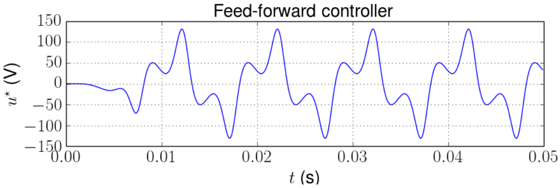


Figure: Tension d'entrée $v_a^{\star}$ pour une trajectoire cible sinusodale (régularisée à l'origine) d'amplitude 3.62mm et fréquence $f_0 = 100$ Hz.

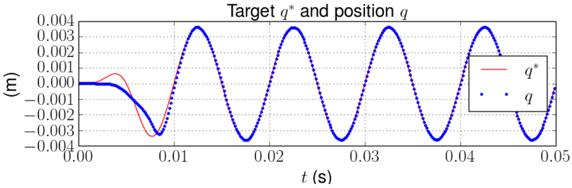
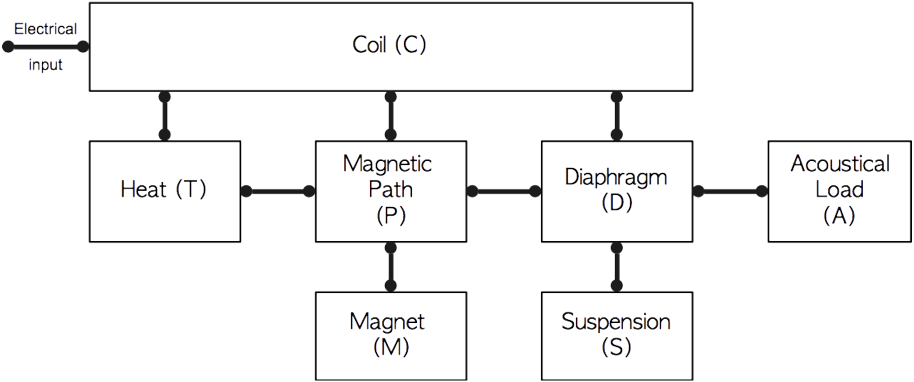


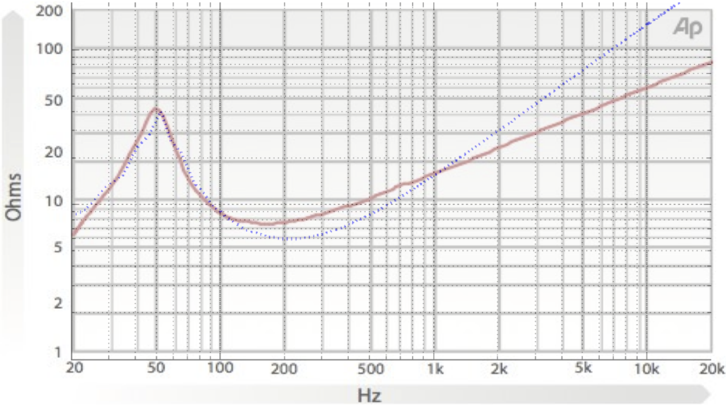
Figure: Cible et simulation pour la sortie plate.

Raffinement du modèle standard



1. Prise en compte explicite du circuit magnétique.
2. Dynamiques fractionnaires (courants de Foucault et relaxation).
3. Dynamique de la température.

Impédance électrique



Intégrateur fractionnaire $y_\beta(s) = s^{-\beta} u_\beta(s)$

Variable de Laplace $s = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$

$\mathcal{T}_\beta(\rho e^{-i\pi}) \neq \mathcal{T}_\beta(\rho e^{i\pi})$ $\Rightarrow$ coupure le long de $\mathcal{C} = \mathbb{R}_-$

Théorème des résidus

$\mathcal{T}_\beta \equiv$ agrégation continue sur $\mathcal{C}$ d'amortissements linéaires

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_\beta(s) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- & \rightarrow & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \int_0^\infty \mu_\beta(\xi) \frac{1}{s+\xi} \mathrm{d}\xi \end{array}$$

$\mu_\beta(\xi) = \frac{\mathcal{T}_\beta(-\xi - i0^+) - \mathcal{T}_\beta(-\xi + i0^+)}{2i\pi} = \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \xi^{-\beta}$ (saut de $\mathcal{T}_\beta$ au travers de $\mathcal{C}$).

Représentation d'état de $y_\beta(s) = \mathcal{T}_\beta(s) u_\beta(s)$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_\xi}{\mathrm{d}t} & = -\xi x_\xi + u_\beta, \quad x_\xi(0) = 0, \\ y_\beta & = \int_0^{+\infty} \mu_\beta(\xi) x_\xi \mathrm{d}\xi. \end{cases}$$

Intégrateur fractionnaire $y_\beta(s) = s^{-\beta} u_\beta(s)$

Approximation sur un ensemble fini de pôles $\xi_n \in \mathcal{C},\ n \in [1, \cdots, N]$

$$\widehat{\mathcal{T}}_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{s + \xi_n} = \mathbf{E}(s) \cdot \boldsymbol{\mu} \quad \text{with} \quad \mathbf{E}(s) = \left(\tfrac{1}{s+\xi_1} \cdots \tfrac{1}{s+\xi_N} \right)^{\mathsf{T}}.$$

- Progression exponentielle pour les pôles $\xi_n = 10^{\ell_n} \in \mathcal{C},\ 0 \leq n \leq N+1$,
- Critères perceptifs $\Rightarrow$ objectif $\mathcal{O}(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\omega_-}^{\omega_+} \left| 1 - \frac{\widehat{\mathcal{T}}_\beta(s=i\omega)}{\mathcal{T}_\beta(s=i\omega)} \right|^2 \mathrm{d} \ln \omega$.

En pratique: somme finie sur une grille fréquentielle (de dimension K+1)

$$\widehat{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\mu}) = \overline{(\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mathcal{T}})}^T \mathbf{W} (\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mathcal{T}}),$$

où les lignes de $\mathbf{M}$ sont $[\mathbf{M}]_{k,*} = \mathbf{E}(s = i\omega_{k-\frac{1}{2}})^T$, $\omega_{k-\frac{1}{2}} = \sqrt{\omega_{k-1}\omega_k}$, $[\boldsymbol{\mathcal{T}}]_k = \mathcal{T}_\beta(s = i\omega_{k-\frac{1}{2}})$, $[\mathbf{W}]_{k,k} = (\ln \omega_k - \ln \omega_{k-1}) \,/\, \left| [\boldsymbol{\mathcal{T}}]_k \right|^2$.

Intégrateur fractionnaire $y_\beta(s) = s^{-\beta} u_\beta(s)$

Minimisation sous contrainte de positivité $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \{\min_{\boldsymbol{\mu}} \widehat{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\mu} > 0\}$

Système Hamiltonien à ports: $p_n = \frac{1}{\widehat{\mu}_n}$ et $r_n = p_n \xi_n$, $\forall\ n \in (1 \cdots N)$

- $n_{\mathbf{x}} = N$ composants stockants d'énergies $H_n(x_n) = \frac{x_n^2}{2p_n}$,
- $n_{\mathbf{w}} = N$ composants dissipatifs de lois constitutives $z_n(w_n) = r_n \cdot w_n$
- $n_{\mathbf{u}} = 1$ port (u_β, y_β)

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}}_\alpha}{\mathrm{d}t} \\ \hline \widehat{\mathbf{w}}_\alpha \\ \hline \widehat{y}_\alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{0}_{N\times N} & -\mathbf{I_d}_N & \mathbb{1}_{N\times 1} \\ \hline \mathbf{I_d}_N & \mathbb{0}_{N\times N} & \mathbb{0}_{N\times 1} \\ \hline \mathbb{1}_{1\times N} & \mathbb{0}_{1\times N} & \mathbb{0}_{1\times 1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \widehat{H}_\alpha}{\partial \widehat{\mathbf{x}}_\alpha} \\ \hline \widehat{\mathbf{z}}_\alpha(\widehat{\mathbf{w}}_\alpha) \\ \hline \widehat{u}_\alpha \end{array}\right),$$

Interprétation

- $u_\beta \equiv i$ et $y_\beta \equiv v \rightarrow$ connexion série de N cellules RC parallèle,
- $y_\beta \equiv i$ et $u_\beta \equiv v \rightarrow$ connexion parallèle de N cellules RL série.

Dérivation fractionnaire $y_\alpha(s) = s^\alpha u_\alpha(s)$

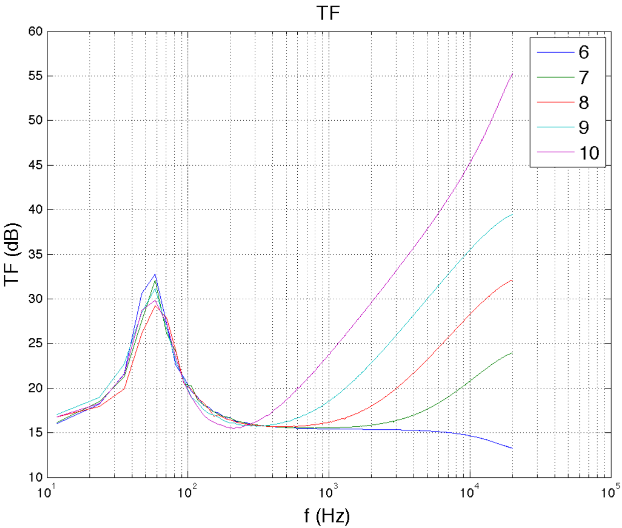
Réalisation à partir de l'intégrateur d'ordre $(1-\alpha)$: $s^\alpha \equiv s \cdot s^{-(1-\alpha)}$

Système Hamiltonien à ports: $p_n = \frac{1}{\widehat{\mu}_n}$ et $r_n = \widehat{\mu}_n$, $\forall\ n \in (1 \cdots N)$

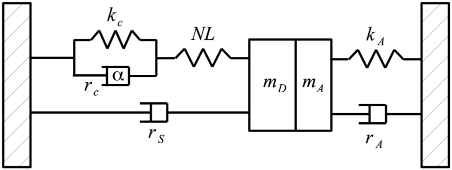
- $n_\mathbf{x} = N$ composants stockants d'énergies $H_n(x_n) = \xi_n \frac{x_n^2}{2}$,
- $n_\mathbf{w} = N$ composants dissipatifs de lois constitutives $z_n(w_n) = r_n w_n$
- $n_\mathbf{u} = 1$ port (u_α, y_α)

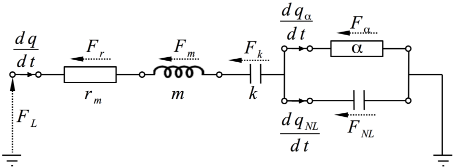
$$\left(\begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}}_\alpha}{\mathrm{d}t} \\ \hline \widehat{\mathbf{w}}_\alpha \\ \hline \widehat{y}_\alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{0}_{N\times N} & -\mathbf{I_d}_N & \mathbb{0}_{N\times 1} \\ \hline \mathbf{I_d}_N & \mathbb{0}_{N\times N} & -\mathbb{1}_{N\times 1} \\ \hline \mathbb{0}_{1\times N} & -\mathbb{1}_{1\times N} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \widehat{H}_\alpha}{\partial \widehat{\mathbf{x}}_\alpha} \\ \hline \widehat{\mathbf{z}}_\alpha(\widehat{\mathbf{w}}_\alpha) \\ \hline \widehat{u}_\alpha \end{array}\right).$$

Impédance fractionnaire



Modèle proposé pour la partie mécanique





SHP pour la partie mécano-acoustique (D,S,A)

$$\mathbf{x} = (p, q, q_{NL}, q_c, \mathbf{x}_\alpha)^\mathsf{T}, \quad H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2m} + \frac{x_2^2}{2k_a} + H_{NL}(x_3) + \frac{x_4^2}{2k_c} + H_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$$

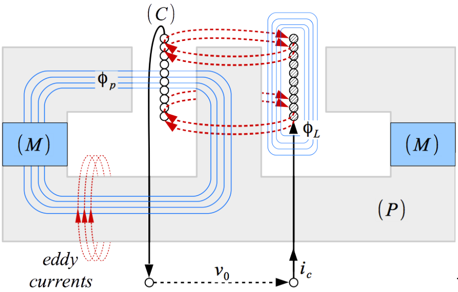
$$\mathbf{w} = (\partial_t q, \mathbf{w}_\alpha)^\mathsf{T}, \quad \mathbf{z}(\mathbf{w}) = \left(r_m w_1, \mathbf{R}_\alpha \mathbf{w}_\alpha\right)^\mathsf{T}$$

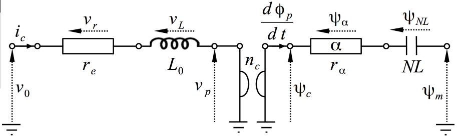
$$\mathbf{u} = (f_{\mathcal{L}})^\mathsf{T}, \quad \mathbf{y} = (\partial_t q)^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{J_x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & \mathbb{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{0} \\ 0 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ 0 & \mathbb{0} \\ 0 & -\mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbf{I_d} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J_w} = \mathbb{0}, \quad \mathbf{G_w} = \mathbb{0}, \quad \mathbf{J_y} = \mathbb{0}$$

Modèle proposé pour la partie magnétique





SHP pour la partie électromagnétique (C,P,M)

$$\mathbf{x} = (\phi_L, \phi_p, \mathbf{x}_\alpha)^\mathsf{T}, \quad H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2L_0} + H_{NL}(x_2) + H_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$$

$$\mathbf{w} = (i_c, \mathbf{w}_\alpha)^\mathsf{T}, \quad \mathbf{z}(\mathbf{w}) = (r_e w_1, \mathbf{R}_\alpha \mathbf{w}_\alpha)^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{u} = (v_0, \psi_m)^\mathsf{T}, \quad \mathbf{y} = (i_c, -\partial_t \phi_p)^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{J_x} = \mathbb{0}, \quad \mathbf{J_w} = \mathbb{0}, \quad \mathbf{J_y} = \mathbb{0}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -n_c \mathbb{1}_{n_\alpha \times n_\alpha} \\ 0 & \mathbb{1}_{n_\alpha \times n_\alpha} \\ \mathbb{0}_{n_\alpha \times 1} & \mathbf{I_d}_{n_\alpha} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbb{0}_{n_\alpha \times 1} & \mathbb{0}_{n_\alpha \times 1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G_w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{0}_{n_\alpha \times 1} & \mathbb{1}_{n_\alpha \times 1} \end{pmatrix}$$

Domaine thermique

Première loi de la thermodynamique $\mathrm{d}U = \delta Q$ (pas de travail $\delta W{=}0$)

Deuxième loi de la thermodynamique $\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}$

Stockage $\equiv$ simple capacité thermique $\delta Q = C\mathrm{d}T$ ($T > 0$, $C = m\,c_p$)

$$S_1 - S_0 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{C}{T}\mathrm{d}T \quad \underset{S_0=0}{\Rightarrow} \quad T_1(S_1) = T_0 \exp\left(\frac{S_1}{C}\right)$$

énergie interne $U(S) = CT_0 \exp\left(\frac{S}{C}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$

Domaine thermique

Pour une résistance R

- Puissance dissipée: $P_D = \delta Q_D = R\, i^2 = z(w)\, w$
- Variation d'entropie du matériau: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{z(w)\, w}{T}$

Système Hamiltonien à ports

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \begin{pmatrix} \partial_t S \\ -v \end{pmatrix} & = & \frac{z(w)}{T} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial S} \\ i \end{pmatrix} \\ w & = & i \end{array} \right.$$

Transferts thermiques

Loi de Newton pour deux coprs (S_i, T_i) $(i, j = 1, 2)$

$$\frac{\delta Q_i}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}t} = R_T \Delta T_{j\to i}$$

pour le gradient de température $\Delta T_{j\to i} = T_j - T_i$ et la résistance thermique R_T.

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial S_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial S_2} \end{pmatrix}.$$

Entropie totale: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t} = R\frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2} \geq 0$

Pour le haut-parleur

4 capacités thermiques

1. bobine (S_c, T_c, C_c),
2. entrefer (S_g, T_g, C_g),
3. circuit magnétique (S_m, T_m, C_m),
4. air ambiant (S_a, T_a, C_a).

Transferts

1. bobine $\rightarrow$ entrefer (R_{cg}),
2. entrefer $\rightarrow$ circuit magnétique (R_{gm}),
3. circuit magnétique $\rightarrow$ air ambiant (R_{ma}).

Système Hamiltonien à ports irréversible

$$\begin{pmatrix} \partial_t S_c \\ \partial_t S_g \\ \partial_t S_m \\ \partial_t S_a \\ \hline -v_r \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{R_{cg}}{T_c} & \frac{R_{cg}}{T_c} & 0 & 0 & \frac{z(w)}{T_r} \\ \frac{R_{cg}}{T_g} & -\frac{R_{cg}+R_{gm}}{T_g} & \frac{R_{gm}}{T_g} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_{gm}}{T_m} & -\frac{R_{gm}+R_{ma}}{T_m} & \frac{R_{ma}}{T_m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{ma}}{T_a} & -\frac{R_{ma}}{T_a} & 0 \\ \hline -\frac{z(w)}{T_r} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial U_c}{\partial S_c} \\ \frac{\partial U_g}{\partial S_g} \\ \frac{\partial U_m}{\partial S_m} \\ \frac{\partial U_a}{\partial S_a} \\ \hline i_r \end{pmatrix}$$

Conclusions et perspectives

Conclusions

1. Structure algébro-différentielle organisée en parties conservative, dissipative et source.
2. Encode la passivité (stabilité, contrôle).
3. La connexion de 2 SHP est encore un SHP $\Rightarrow$ approche modulaire.
4. Méthode numérique préservant la structure passive $\Rightarrow$ simulations passives.
5. Méthode de génération à partir d'un graphe $\Rightarrow$ production automatisée de code C++.

Perspectives

1. Automatiser la discrétisation et la réduction pour des systèmes de dimension infinie.
2. Géométries complexes.
3. Estimation de paramètres.

Merci de votre attention.