Systèmes Hamiltoniens à Ports
avec approche par composants pour la simulation à passivité garantie de problèmes conservatifs et dissipatifs

T. Hélie, A. Falaize et N. Lopes

Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique et du Son,
IRCAM-CNRS-UPMC, 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris.
{*thomas.helie,antoine.falaize,nicolas.lopes*}*@ircam.fr*

Projet ANR Hamecmopsys (`https://hamecmopsys.ens2m.fr/`)

CSMA 2015 - Giens, Mai 2015

Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP): Motivations

1. Modélisation de systèmes dynamiques ouverts

- linéaires ou non linéaires
- multi-physiques *(mécanique, acoustique, électronique, etc)*
- bilan de puissance: phénomènes conservatifs *(énergie stockée)*, phénomènes dissipatifs *(puissance dissipée)*, interagissant avec le milieu extérieur via des ports d'interaction *(puissance externe)*

2. Simulation à passivité garantie:

- préservation du bilan de puissance en temps discret
- structuration en parties conservatives, dissipatives et externes

- Comportement énergétique et stabilité numérique préservés pour tout régime (auto-oscillation, chaos, etc)
- Applications en contrôle (fct. d'énergie $\equiv$ fct. de Lyapunov)

Laboratoire STMS et applications des SHP

L'IRCAM: Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique

http://www.ircam.fr

- **Création** en 1971 par Pierre Boulez
- **Vocation:** interaction entre recherche scientifique, développement technologique et création musicale
- **Laboratoire** (UMR9912, IRCAM-CNRS-UPMC): Sciences et Technologies de la Musique et du Son

Les SHP appliqués aux *Systèmes et Signaux Sonores (Equipe S3)*

Instruments (auto-oscillants)

Electro-acoustique

Electronique

→Modélisation, Synthèse sonore temps-réel, Optimisation et Contrôle

Plan

Systèmes Hamiltoniens à Ports

Formulation classique (van der Shaft et Jeltsema, 2014)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \big(J(x) - R(x)\big)\,\nabla H(x) + G(x)u \\ y = G(x)^T\,\nabla H(x) \end{cases}$$

- $u(t) \in \mathbb{R}^P$: entrée, $x(t) \in \mathbb{X} = \mathbb{R}^N$: état, $y(t) \in \mathbb{R}^P$: sortie
- Energie totale: $E(t) = H\big(x(t)\big)$ avec $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{X}, \mathbb{R}^+)$ définie positive
- Matrices: $J = -J^T$ anti-symétrique et $R = R^T$ positive

Bilan de puissance

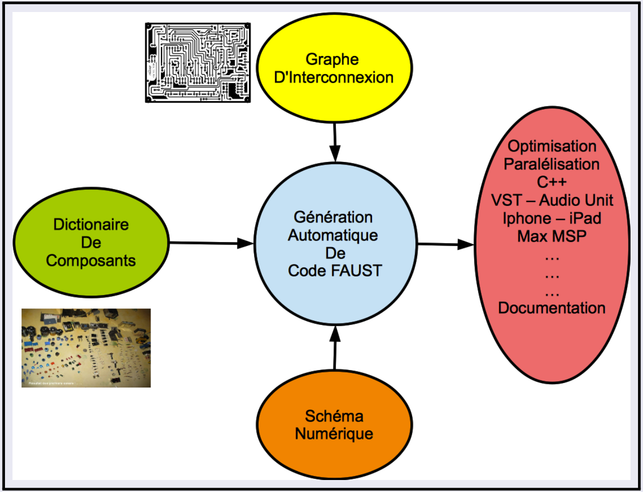
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \nabla H(x)^T \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\nabla H(x)^T J(x)\,\nabla H(x)}_{P_c=0} - \underbrace{\nabla H(x)^T R(x) \nabla H(x)}_{Q\geq 0} + \underbrace{y^T u}_{P_{\mathrm{ext}}}$$

- $P_c = 0$ car $J = -J^T$ (échanges de puissance entre composants stockants)
- $Q \geq 0$ car $R \geq 0$ (puissance dissipée)
- P_{ext} est la puissance apportée via les entrées-sorties (ports externes)

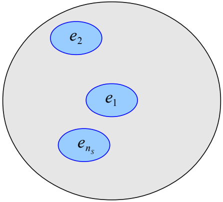
Passivité du système: à sources externes éteintes ($u=0$), l'énergie est constante (cas conservatif $Q=0$) ou décroissante (cas dissipatif $Q>0$).

Approche par composants élémentaires

Exemple d'application: (Thèse d'A. Falaize)

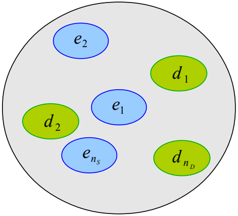


Un système physique est fait de...



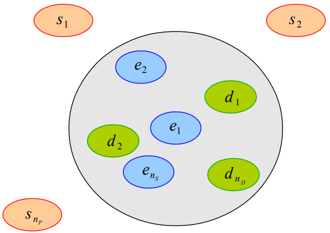
- Composants stockants: énergie $E = \sum_{n=1}^{N} e_n \geq 0$

Un système physique est fait de...



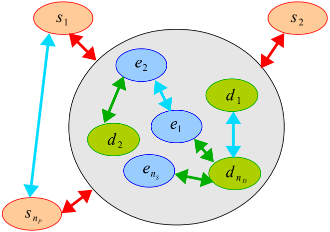
- Composants stockants: énergie $E = \sum_{n=1}^{N} e_n \geq 0$
- Composants dissipatifs: puissance dissipée $Q = \sum_{m=1}^{M} d_m \geq 0$

Un système physique est fait de...



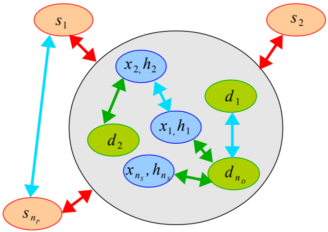
- Composants stockants: énergie $E = \sum_{n=1}^{N} e_n \geq 0$
- Composants dissipatifs: puissance dissipée $Q = \sum_{m=1}^{M} d_m \geq 0$
- Sources externes: puissance externe $P_{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{P} s_p$

Un SHP est une représentation d'état d'un système physiques structurée selon les échanges de puissance.



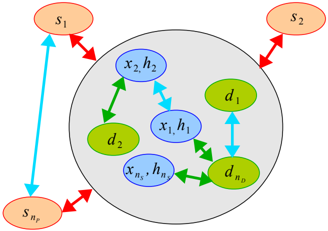
- Composants stockants: énergie $E = \sum_{n=1}^{N} e_n \geq 0$
- Composants dissipatifs: puissance dissipée $Q = \sum_{m=1}^{M} d_m \geq 0$
- Sources externes: puissance externe $P_{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{P} s_p$

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



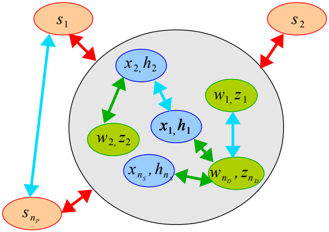
- Énergie stockée *(cas monovariant)*
  $E = H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} H_n(x_n)$
  H_n: $\mathcal{C}^1$ définie positive

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



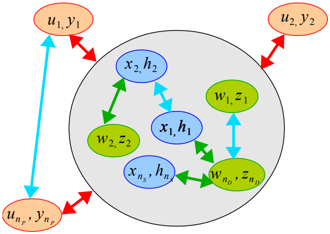
- Énergie stockée *(cas monovariant)*
  $E = H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} H_n(x_n)$
- Variation d'énergie: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\frac{dE}{dt} = \nabla H(x)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{d}H_n}{\mathrm{d}x_n} \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



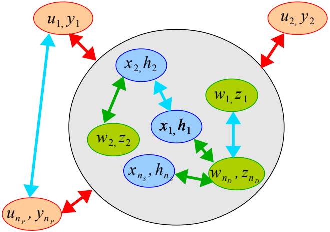
- Énergie stockée *(cas monovariant)*
  $E = H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} H_n(x_n)$
- Variation d'énergie: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\frac{dE}{dt} = \nabla H(x)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{d}H_n}{\mathrm{d}x_n} \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$
- Puissance dissipée: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $Q = \mathbf{z}(\mathbf{w})^{\mathbf{T}}\mathbf{w} = \sum_{m=1}^{M} z_m(w_m)\, w_m$
  $\left(\frac{\mathrm{d}z_m}{\mathrm{d}w_m} > 0 \text{ et } z_m(0) = 0\right)$

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



- Énergie stockée *(cas monovariant)*
  $E = H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} H_n(x_n)$
- Variation d'énergie: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $\frac{dE}{dt} = \nabla H(x)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{d}H_n}{\mathrm{d}x_n} \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$
- Puissance dissipée: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $Q = \mathbf{z}(\mathbf{w})^{\mathbf{T}}\mathbf{w} = \sum_{m=1}^{M} z_m(w_m)\, w_m$
- Puissance externe: $\langle$effort,flux$\rangle$
  $P_{\mathrm{ext}} = \mathbf{u}^T\mathbf{y} = \sum_{p=1}^{P} u_p y_p$

Un SHP est un système physique à représentation d'état structurée selon les échanges de puissance.



Le bilan de puissance

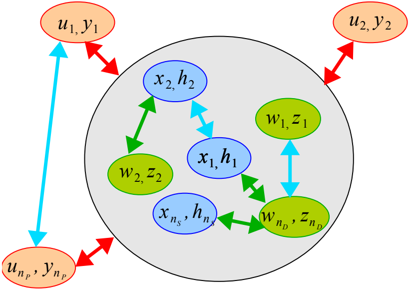
$$\frac{dE}{dt} = -Q + P_{\mathrm{ext}}$$

se réécrit

$$\nabla H(x)^T \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{z}(\mathbf{w})^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{y}$$

Formulation algébro-différentielle des SHP:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{array}\right) = S \cdot \left(\begin{array}{c} \nabla\mathcal{H}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{array}\right) \quad \text{avec } S = -S^T \text{ anti-symétrique}$$



$$S = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \hline \mathbf{K}^T & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_w \\ \hline -\mathbf{G}_x^T & -\mathbf{G}_w^T & \mathbf{J}_y \end{array}\right)$$

Formulation algébro-différentielle des SHP:

$$\boxed{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix} = S.\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{S}} \cdot \boxed{\mathbf{A}},$$

avec $S = -S^T$ anti-symétrique

Encode le bilan de puissance:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\mathbf{z}(\mathbf{w})^T.\mathbf{w}}_{Q \geq 0} - \mathbf{u}^T.\mathbf{y} = \boxed{\mathbf{A}^T} \cdot \boxed{\mathbf{B}}$$

$$= \boxed{\mathbf{A}^T} \cdot \boxed{\mathbf{S}} \cdot \boxed{\mathbf{A}} = 0$$

car $\boxed{\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}}$

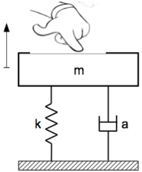
Retour à la formulation 1: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (J - R)\nabla H(x) + Gu$ ...

... en éliminant w par résolution algébrique $w = W(\nabla H(x), u)$

Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Formulation algébro-différentielle des SHP:

$$\boxed{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix} = S.\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{S}} \cdot \boxed{\mathbf{A}}$$



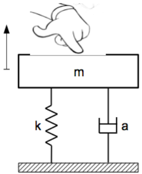
Les composants (convention récepteur)

Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	↑↓
$\boxed{m}$	x_1 = qté de mvt	$H_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}x_1}$	$F_1 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$	↑
ressort k	x_2 = élongation	$H_2(x_2) = \frac{k}{2}x_2^2$	$v_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$	$F_2 = \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}x_2}$	↑
amortisseur a	w_3 = vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w$	$F_3 = z_3(w_3)$	↑
Excitation	$\oslash$	$\oslash$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$	↓

Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Que vaut $\boxed{\mathbf{A}}$?

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix} = S.\boxed{\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix}}$$

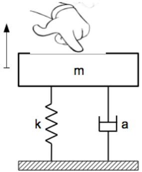


Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	↑↓
$\boxed{m}$	x_1 = qté de mvt	$H_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$\boxed{v_1 = \frac{dH_1}{dx_1}}$	$F_1 = \frac{dx_1}{dt}$	↑
k	x_2 = élongation	$H_2(x_2) = \frac{k}{2}x_2^2$	$v_2 = \frac{dx_2}{dt}$	$\boxed{F_2 = \frac{dH_2}{dx_2}}$	↑
$\boxed{a}$	w_3 = vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w$	$\boxed{F_3 = z_3(w_3)}$	↑
Excitation	∅	∅	$v_4 = -y_4$	$\boxed{F_4 = u_4}$	↓

Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Que vaut $\boxed{\mathbf{B}}$?

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix}} = S.\boxed{\begin{pmatrix} v_1 \\ F_2 \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \end{pmatrix}}$$



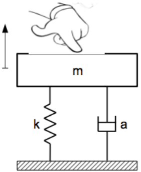
Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	↑↓
$\boxed{m}$	$x_1 =$ qté de mvt	$H_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$\boxed{v_1 = \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}x_1}}$	$\boxed{F_1 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}}$	↑
k	$x_2 =$ élongation	$H_2(x_2) = \frac{k}{2}x_2^2$	$\boxed{v_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}}$	$\boxed{F_2 = \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}x_2}}$	↑
a	$w_3 =$ vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$\boxed{v_3 = w}$	$\boxed{F_3 = z_3(w_3)}$	↑
Excitation	$\varnothing$	$\varnothing$	$\boxed{v_4 = -y_4}$	$\boxed{F_4 = u_4}$	↓

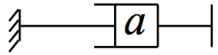
Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Que vaut $\boxed{\mathbf{S}}$?

1. Equilibre des forces (avec RFD)

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_2 \\ \hline v_3 \\ \hline -v_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & -1 & -1 & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ F_2 \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \end{pmatrix}$$



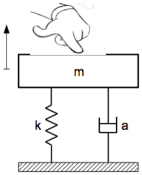
Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	$\uparrow\downarrow$
$\boxed{m}$	$x_1 =$ qté de mvt	$H_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}x_1}$	$F_1 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$	$\uparrow$
 k	$x_2 =$ élongation	$H_2(x_2) = \frac{k}{2}x_2^2$	$v_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$	$F_2 = \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}x_2}$	$\uparrow$
 a	$w_3 =$ vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w$	$F_3 = z_3(w_3)$	$\uparrow$
Excitation	$\varnothing$	$\varnothing$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$	$\downarrow$

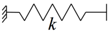
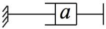
Exemple: Oscillateur mécanique amorti excité par une force

Que vaut $\boxed{\mathbf{S}}$?

1. Equilibre des forces (avec RFD)
2. Egalité des vitesses (avec conventions)

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_2 \\ \hline v_3 \\ \hline -v_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline +1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ F_2 \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \end{pmatrix}$$



Composant	Variable	Fonction	Flux	Effort	↑↓
$\boxed{m}$	x_1 = qté de mvt	$H_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2m}$	$v_1 = \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}x_1}$	$F_1 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$	↑
	x_2 = élongation	$H_2(x_2) = \frac{k}{2}x_2^2$	$v_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$	$F_2 = \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}x_2}$	↑
	w_3 = vitesse	$z_3(w_3) = a \cdot w_3$	$v_3 = w$	$F_3 = z_3(w_3)$	↑
Excitation	$\varnothing$	$\varnothing$	$v_4 = -y_4$	$F_4 = u_4$	↓

Quelques variations

Système Hamiltonien (autonome, non amorti)

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_2 \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & -1 & \cdot & \cdot \\ +1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ F_2 \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \end{pmatrix}$$

"Masse+Amortissement+Excitation"

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \hline v_3 \\ \hline -v_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & \cdot & -1 & +1 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline +1 & \cdot & 0 & 0 \\ \hline -1 & \cdot & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \end{pmatrix}$$

"Masse+Excitation"

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline -v_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & \cdot & \cdot & +1 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline -1 & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline F_4 \end{pmatrix}$$

En résumé

Formulation 1

$$\left\{\begin{array}{lcllr} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & (J-R) & \nabla H(x) & +G\,u \\ y & = & G^T & \nabla H(x) & \end{array}\right.$$

Formulation 2

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \hline \mathbf{w} \\ \hline -\mathbf{y} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \hline \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Cas du "Masse-amortisseur-ressort": $H(x) = \frac{x_1^2}{2m} + \frac{k\,x_2^2}{2}$, $z(w) = aw$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Schéma Numérique

Schéma numérique

Approche

- **Cas classique** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$**:** efforts sur l'approx. de $\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}t}$ et l'exploitation de f
- **Cas SHP:** préserver le bilan de puissance en temps discret

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \nabla H(x)^T \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\nabla H(x)^T J(x)\, \nabla H(x)}_{P_c=0} - \underbrace{\nabla H(x)^T R(x) \nabla H(x)}_{Q \geq 0} + \underbrace{y^T u}_{P_{\mathrm{ext}}}$$

Comment? (1) règle de dérivation en chaîne pour $E = H \circ x$; (2) exploiter J et R

(1) Choix: $\frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \sum_{n=1}^{N} \frac{H_n(x_n[k+1])-H_n(x_n[k])}{x_n[k+1]-x_n[k]} \cdot \frac{x_n[k+1]-x_n[k]}{\delta T}$

(2) Substitutions: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \to \frac{\delta x[k]}{\delta T} = \frac{\mathbf{x}[k+1]-\mathbf{x}[k]}{\delta T}$ et $\nabla H(x) \to \nabla_d H\big(x[k], \delta x[k]\big)$ avec

$$[\nabla_d H(x, \delta x)]_n = \frac{H_n(x_n + \delta x_n) - H_n(x_n)}{\delta x_n} \text{ si } \delta x_n \neq 0 \text{ et } H_n'(x_n) \text{ sinon}$$

Cette méthode répartit les efforts sur deux approximations:

1. celle des applications différentielles; 2. celle du champ de vecteur $f = (J - R)\nabla H \to f_d = (J - R)\nabla_d H$.

Schéma numérique

Formulation 1: $x[k+1] = x[k] + \delta x[k]$ avec à résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\delta x[k]}{\delta t} = (J-R)\ \nabla_d H(x[k], \delta x[k]) + G u[k] \\ y[k] = G^T\ \nabla_d H(x[k], \delta x[k]) \end{cases}$$

Cas des systèmes linéaires $H(x) = \frac{1}{2} x^T W x$ avec $W = W^T > 0$

Point milieu: $\nabla_d H(x[k], \delta x[k]) = W\left(x[k] + \frac{\delta x[k]}{2}\right) = \nabla H\left(\frac{x[k]+x[k+1]}{2}\right)$

On peut montrer que: (Aoues, 2014) & (Lopes et al., 2015)

(A) Gradient discret: encore définissable pour les H non mono-variants

(L) Consistance: ordre 1 en général et 2 pour J et R indépendants de (x, w),

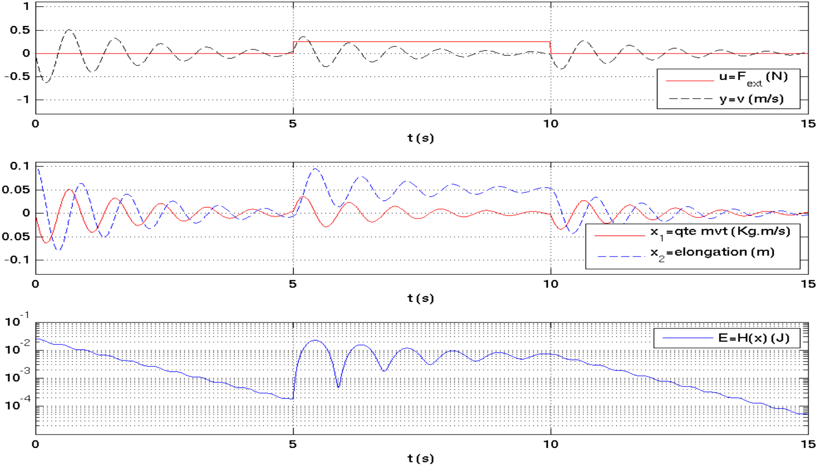
(L) Ordre 2 atteignable (raffinement de type Runge-Kutta),

(L) Solution explicitable par chgt. de var., si H est convexe

4. Résultats

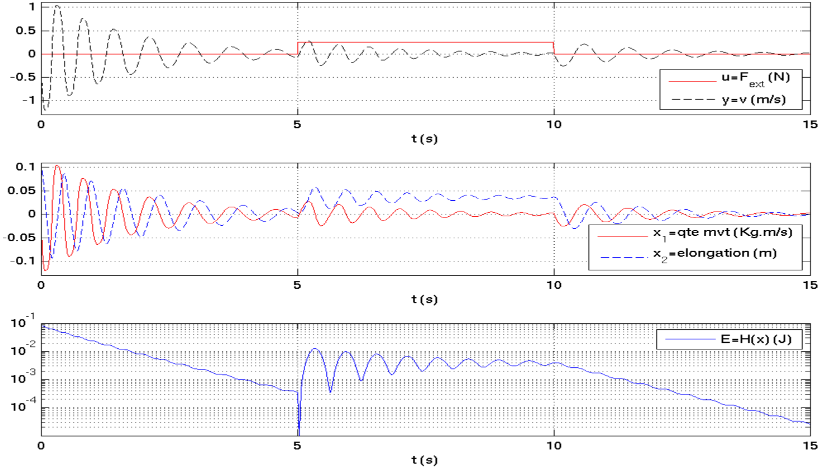
Simulation 1: masse-amortisseur-ressort

- **Paramètres:** $m = 100\,\mathrm{g}$, $k = 3\,\mathrm{kN/m}$, $a = 0.1\,\mathrm{N.s/m}$ et $\delta t = 5\,\mathrm{ms}$
- **Conditions Initiales:** $x_0 = \left[mv_0 = 0,\ \ell_0 = 10\,\mathrm{cm}\right]^T$
- **Excitation:** $F_{\mathrm{ext}}(t) = F_{\max}\,\mathbf{1}_{[5\mathrm{s},10\mathrm{s}]}(t)$ avec $F_{\max} = k\ell_0/2 = 0.25\,\mathrm{N}$



Simulation 2: idem pour un ressort raidissant

- **Energie potentielle:** $H_2^{\mathrm{NL}}(x_2) = k\,L^2\left[\cosh(x_2/L) - 1\right] \quad (\sim k\,x_2^2/2)$
- **Loi constitutive:** $F_2 = (H_2^{\mathrm{NL}})'(x_2) = k\,L\,\sinh(x_2/L) \quad (\sim k\,x_2)$
- **Elongation critique:** $L = \ell_0/4 = 25\,\mathrm{mm}$



Remarques conclusives

SHP: résumés des points clefs

- **Composants:** a. stockage d'énergie (H: déf. pos., ∇H: lois constitutives), b. dissipation ($Q = w^T z(w) \geq 0$, z: lois const.), c. extérieurs (ports)
- **2. Interconnexion:** réseau d'échanges de puissance encodé par l'anti-symétrie de S (concept général: structure de Dirac)
- **3. Simulation:** versions discrètes de $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t, \nabla)$ avec règle de dérivation en chaîne de $H \circ x$ pour que S exprime encore les échanges de puissance

Rq: compatible avec les méthodes variationnelles, mais ne sont PAS requis

(i) pb conservatif, (ii) $\dim(\mathbb{X})$ paire, (iii) J ou S canoniques (ex: $H(v) = \frac{1}{2}mv^2$)

Littérature abondante (cf. [1] A. J. van der Schaft and D. Jeltsema, Port-Hamiltonian Systems Theory: An Introductory Overview, 2014)

- Problèmes multi-physiques de dimension finie et infinie (EDP, op. pseudo-différentiels, etc) [10, 11]
- Inclusion de des phénomènes hystérétiques [8] ou à modèle entropique [9].
- Réduction de modèle, théorie du contrôle, etc

Exemple en dim. infinie: Poutre d'Euler-Bernoulli amortie

1. Modèle linéaire adimensionné ($t\in\mathbb{T}=\mathbb{R}^+$, $z\in[0,1]$, $b_0, b_1 \geq 0$)

- **EDP:** $\partial_t^2 q + \underbrace{(b_0 + b_1\partial_z^4)}_{C}\partial_t q + \underbrace{\partial_z^4}_{K} q = f_{\text{ext}}$ (q: déflexion, f_{ext}: force linéique)
- **CI**: nulles; **CF** ($z\in\{0;1\}$): extrémités fixes ($q=0$) sans moment ($\partial_z^2 q=0$)

2. Cadre fonctionnel

- **Espace Hilbertien des configurations:** $q(t)\in\mathbb{H}=L^2(0,1)$
- **Opérateur K:** non borné, fermé, dense, auto-adjoint et positif sur $\mathbb{H}$, de domaine $\mathcal{D}(K)=\{q\in H^4(0,1) \text{ t.q. } q(0)=q(1)=0,\ q''(0)=q''(1)=0\}$
- **Opérateur C:** positif, défini sur $\mathcal{D}(C)=\mathcal{D}(K)$
- **Force distribuée:** trajectoire bornée sur $\mathbb{H}$ ($f_{\text{ext}}\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T},\mathbb{H})$)

3. Opérateur $K^{1/2}$, espace d'état $\mathbb{X}$ et fonctionnelle d'énergie H

- $K^{1/2}(\equiv\partial_z^2)$: unique racine carrée positive de K sur $\mathbb{H}^{1/2}=\mathcal{D}(K^{1/2})$ équipé de $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^{1/2}}=\|K^{1/2}\ \cdot\|_{\mathbb{H}}$
- $x(t)\in\mathbb{X}=\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}\times\mathbb{H}$: $x=[q,\partial_t q]^T$ de norme $\|x\|_{\mathbb{X}}=\left(\|x_1\|^2_{\mathbb{H}^{1/2}}+\|x_2\|^2_{\mathbb{H}}\right)^{\frac{1}{2}}$
- **Energie:** $H(x)=\frac{1}{2}\|x\|_{\mathbb{X}}=\int_0^1\frac{1}{2}(K^{\frac{1}{2}}x_1)^2\,\mathrm{d}z+\int_0^1\frac{1}{2}x_2^2\,\mathrm{d}z$

Poutre amortie: représentation en SHP

- **Energie:** $x = [q, \partial_t q]^T$, $E = H(x) = \frac{\langle x, x \rangle}{2}$ où $\langle x, \xi \rangle = \int_0^1 (\partial_z^2 x_1\, \partial_z^2 \xi_1 + x_2\, \xi_2)\, \mathrm{d}z$
- **Dissipation:** $w = \partial_t q$, $z(w) = Cw = (b_0 + b_1 \partial_z^4) w$
- **Entrée/Sortie:** $u = f_{\text{ext}}$, $y = \partial_t q$

SHP et bilan de puissance (δ_x: dérivée variationnelle)

- **Forme 1:** $\begin{cases} \partial_t x = [J - R]\, \delta_x H(x) + G u \\ y = G^* \delta_x H(x) \end{cases}$ où $\delta_x H(x) = \begin{bmatrix} K^{\frac{1}{2}} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x^2 q \\ \partial_t q \end{bmatrix}$

  avec $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $G^* = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$.
- **Bilan:** $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = \langle x, \partial_t x \rangle = \underbrace{\langle x, J\delta_x H(x) \rangle}_{0} - \underbrace{\langle x, R\delta_x H(x) \rangle}_{Q} + \underbrace{\langle x, G u \rangle}_{P_{\text{ext}}}$

  où $Q = \int_0^1 \left[b_0 x_2^2 + b_1 (\partial_z^2 x_2)^2 \right] \mathrm{d}z \geq 0$ et $P_{\text{ext}} = \langle y, u \rangle_{L^2(0,1)}$
- **Forme 2:** $\begin{bmatrix} \partial_t x \\ w \\ -y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \delta_x H(x) \\ z(w) \\ u \end{bmatrix}$ où $S = \begin{bmatrix} J & -G & G \\ G^* & 0 & 0 \\ -G^* & 0 & 0 \end{bmatrix}$

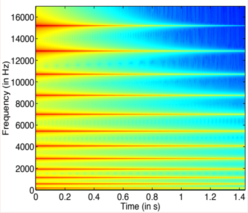
Poutre amortie: simulation

Méthode

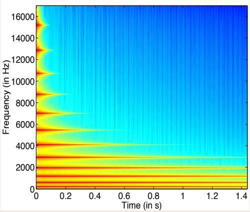
- **1. Réduction d'ordre:** décomposition sur les modes propres et troncature sur les P premiers modes
- **Propriétés:** positivité des op. K, $K^{1/2}$, C et R projetés; anti-symétrie pour J et S.
- **2. Schéma numérique:** gradient discret sur le système de dim. $N = 2P$

Spectrogramme de simulations (redimensionnées) $b_0 \sim 10^{-2}$

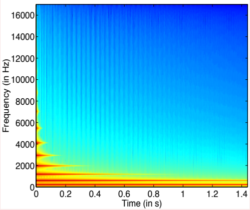
Son "métal" $(b_1 \sim 10^{-6})$



"verre" $(b_1 \sim 10^{-5})$



"bois" $(b_1 \sim 10^{-4})$



Quelques références

A. J. van der Schaft and D. Jeltsema.
Port-Hamiltonian Systems Theory: An Introductory Overview.
NOW Publishing Inc., 2014.

A. Falaize and T. Hélie.
Simulation of an analog circuit of a wah pedal: a port-hamiltonian approach.
In 135th convention of the Audio Engineering Society, pages 1–9, 2013.

A. Falaize, N. Lopes, T. Hélie, D. Matignon, and B. Maschke.
Energy-balanced models for acoustic and audio systems: a port-Hamiltonian approach.
In Unfold Mechanics for Sounds and Music, pages 1–8, 2014.

A. J. van der Schaft and B. Maschke.
Port-hamiltonian systems on graphs.
SIAM J. on Control and Optimization, 51(2):906–937, 2013.

T. Usciati.
Analyseur de circuit électronique analogique audio, et génération automatique de code pour la simulation temps réel.
Master's thesis, M2 ATIAM, UPMC, 2012.

S. Aoues.
Schémas d'intégration dédiés à l'étude, l'analyse et la synthèse dans le formalisme Hamiltonien à ports.
PhD thesis, INSA, 2014.

N. Lopes, T. Hélie, and A. Falaize.
Explicit second-order accurate method for the passive guaranteed simulation of port-hamiltonian systems.
In IFAC-LHMNLC, pages 1–6.

D. Habineza, M. Rakotondrabe, and Y. Le Gorrec.
Bouc-Wen modeling and feedforward control of multivariable hysteresis in piezoelectric systems: Application to a 3-dof piezotube scanner.
IEEE-TCST, 2015.

B. Maschke H. Ramirez and D. Sbarbaro.
Modelling and control of multi-energy systems: An irreversible port-hamiltonian approach.
European Journal of Control, 19(6):513–520, 2013.

A. J. van der Schaft and B. Maschke.
Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow.
J. of Geometry and Physics, 42(1):166–194, 2002.

J. Villegas.
A Port-Hamiltonian Approach to Distributed Parameter Systems.
PhD thesis, Univ. Twente, 2007.

T. Hélie and D. Matignon.
Nonlinear damping models for linear conservative mechanical systems with preserved eigenspaces: a port-hamiltonian formulation.
In IFAC-LHMNLC, volume 5, pages 1–6.

L. Lefèvre N. M. T. Vu and B. Maschke.
Port-hamiltonian formulation for systems of conservation laws: application to plasma dynamics in tokamak reactors.
In IFAC-LHMNLC, pages 108–113, 2012.